第 1 講

数と式，整数(1)

この講では数と式，および整数の性質の一部を扱う。数と式では基本的な式変形と計算，整数では素因数分解，約数，倍数，余りがらみの議論を学ぶことが目標となる。

1.1　数と式

1.1.1　展開・因数分解

数と式においては，展開および因数分解ができることが基本となる。そこで，展開公式と因数分解公式を復習する。

【展開公式】

(1)　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　(複号同順)

(2)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3)　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4)　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(5)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(6)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

【注】

1°　(1)から(5)までは２次式で，(6)，(7)は３次式の展開公式である。これらは自然と用いられるようにしておくことが望ましい。右辺から左辺に戻る変形は，因数分解公式としても用いる。

2°　展開は分配法則によりどのような順序で計算してもできるが，順序によっては大変な計算になることもあるので，よりよい計算になるようにどこから始めるかは考えておきたい。また，同じ形があるときはカタマリとみて（必要なら置換して）計算，対称式では和と差や和と積を主役にして計算をするなどしないといけない。

例題１

次の各問いに答えよ。

(1)　$(x+2)(x^2+4)(x-2)$

を展開せよ。

(2)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

を展開せよ。

(3)　$(x+1)^2(x+2)^2$

を展開せよ。

(4)　$(x^2-2x+3)(2x^2+x+4)$

を展開したときの x^2 の係数を求めよ。

【解答】

(1)　$(x+2)(x-2)(x^2+4)$

$=(x^2-4)(x^2+4)$

$=\boldsymbol{x^4-16}$

(2)　$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=\boldsymbol{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

(3)　$\{(x+1)(x+2)\}^2$

$=(x^2+3x+2)^2$

$=\boldsymbol{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$

(4)　$x^2=x^2\cdot 1$，$x\cdot x$，$1\cdot x^2$

だから，

$1\cdot 4+(-2)\cdot 1+3\cdot 2=\boldsymbol{8}$

【注】

1°　展開公式のうち必要なものを用いる。(1)，(2)，(3)は計算の順番にも気を遣う。(2)は x^2+5x をカタマリとみて解答のように展開するのがよいが，慣れないうちは $t=x^2+5x$ と置換してもよい。(4)は展開式が「各（　）の中の１つの項ずつの積の和」であることに注意して計算する。真面目に展開するイメージで必要なところのみ取り出すのである。

【因数分解公式】

(1)　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$　(複号同順)

(2)　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3)　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4)　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(5)　$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$

(6)　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(7)　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

【注】

1°　展開公式の裏返しである。特に(2)，(3)，(4)をよく用いる。

2° 因数分解をする際は，共通因数やカタマリに注意した後，**最低次数の文字で整理する**ことが大切であった。文字が多いときほど，どの文字に意識を向けるかに注意して議論するように。

例題 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+x)(x^2+x+1)-2$

(2) $x^2+2xy+3x+4y+2$

(3) $x^2-3xy-4y^2+3x-7y+2$

(4) x^4+x^2+1

【解答】

(1) $t=x^2+x$ とすると，

$(与式)=t(t+1)-2$

$=t^2+t-2$

$=(t+2)(t-1)$

$=\boldsymbol{(x^2+x+2)(x^2+x-1)}$

(2) $(与式)=2y(x+2)+x^2+3x+2$

$=2y(x+2)+(x+1)(x+2)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x+2y+1)}$

(3) $(与式)=x^2-3(y-1)x-(4y^2+7y-2)$

$=x^2-3(y-1)x-(4y-1)(y+2)$

$=\{x-(4y-1)\}\{x+(y+2)\}$

$=\boldsymbol{(x-4y+1)(x+y+2)}$

(4) x^4+x^2+1

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=\boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

【注】

1° (1)はカタマリを意識して計算する。やみくもに展開すると高次になってしまうので，因数を見つけるのも面倒である。

2° (2)は最低次数で整理する。y の方が次数が低いので，y で整理した後，y を含まない項を因数分解し，全体で共通因数に注意する。

3° (3)は x，y ともに2次であるが，x の方が最高次係数が1で簡単そうなので，x で整理する。x について降べきの順にして，各項ごとに因数分解した後，全体で因数分解する。

4° (4)のような x^2 の2次式のことを複2次式という。複2次式では，x^2 をカタマリとみて，因数分解できるかどうかを考えていく。

x^4-3x^2+2

のような式では，$t=x^2$ とすると

$t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$

と因数分解できるが，この問題では

t^2+t+1

となり，因数分解できない。このようなときは，**最高次と定数項で平方完成を実行する**のが大切である。t^2+1 から $(t\pm1)^2$ の形を無理やり作り，

$t^2+t+1=(t+1)^2-t$

$t^2+t+1=(t-1)^2+3t$

のうち，A^2-B^2 の形をしている方から因数分解をすることになる。

1.1.2 2次方程式の解

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

を解く際は，因数分解できるならして，

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

の形から解を求め，因数分解できないようなら，解の公式から，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と求めていく。因数分解可能かどうかは，共通テストでは解答欄を利用して判断するのがよく，解答欄が整数や分数のようなきれいな値なら因数分解できると考え，± や $\sqrt{}$ があるようなら，解の公式から求めると考えればよい。また，b が偶数 $2b'$ のときの解の公式である

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$$

もよく用いる。

例題 3

次の2次方程式を解け。

(1) $2x^2-3x+1=0$

(2) $4x^2-2x-1=0$

【解答】

(1)　$(2x-1)(x-1)=0$

より，

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ 1}$$

(2)　$\boldsymbol{x}=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-1)}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}}$

【注】

1°　因数分解できるかどうかで扱いを変える。(2)は x の項の係数が偶数なので，偶数のときの解の公式を用いることに注意する。

解の公式から自然と導かれることでもあるが，2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の実数解の個数を判別式

$$D=b^2-4ac$$

の値から考えることができる。分類すると，

$D>0$：異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0$：重解をもつ

$D<0$：実数解をもたない

となる。b が偶数 $2b'$ のときは，D の代わりに

$$\frac{D}{4}=(b')^2-ac$$

を用いる。なお，$D=0$ のときに重解を求めることが要求されることもあり，この場合には解の公式を用いると簡明である。実際，$D=0$ なので，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}$$

と求められる。

例題 4

x についての 2 次方程式

$$4x^2+4ax+a^2+2a-6=0 \qquad \cdots\cdots①$$

を考える。

(1)　①が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　①が重解をもつような a の値と，そのときの重解を求めよ。

【解答】

①の左辺の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-4(a^2+2a-6)=-8(a-3)$$

(1)　$\dfrac{D}{4}>0$ だから，

$$-8(a-3)>0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a<3}$$

(2)　$\dfrac{D}{4}=0$ だから，

$$-8(a-3)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=3}$$

このとき，解の公式により，

$$\boldsymbol{x}=\frac{-2a\pm\sqrt{D/4}}{4}=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$$

【注】

1°　解の公式を意識しつつ，D の値（符号）と条件を結び付けるだけである。(2)は $a=3$ を代入してから考えてもできるが，代入する値が面倒な場合もあるので，文字のまま解の公式で解いてから代入する方がよい。一般的になるべく文字のまま考えて最後に代入する方が計算が楽になることが多い。

1.1.3　有理数・無理数

数の分類は次のようになる。

実数
- 有理数
  - 整数
  - 整数でない有理数
    - 有限小数
    - 循環する無限小数
- 無理数(循環しない無限小数)

有理数は正の公約数が 1 のみである 2 つの整数 $p(>0)$，q を用いて，$\dfrac{q}{p}$ と表せる数である。簡単に言って，有理数は「分数（2 整数の比）」と解釈してよい。有理数，無理数がらみの内容として次の内容がある。

係数比較

a，b，c，dを有理数，α を無理数とするとき，次が成り立つ。

(1)　$a+b\alpha=0 \Longleftrightarrow a=b=0$

(2)　$a+b\alpha=c+d\alpha \Longleftrightarrow a=c$ かつ $b=d$

【証明】

(1)　$b\neq 0$ と仮定すると，

$$\alpha=-\frac{a}{b}$$

左辺は無理数，右辺は有理数で矛盾する。

よって，$b=0$ となり，このとき，$a=0$ でもある。　■

(2)　$a-c+(b-d)\alpha=0$

(1)より，

$$a-c=b-d=0$$

$\therefore$　$a=c$ かつ $b=d$　■

【注】

1°　証明問題は直接導くか，間接証明法で示す。

命題 $p\Longrightarrow q$ が真であることを証明するために $p\Longrightarrow q$ と同値な他の命題が真であることを証明する方法を間接証明法といい，よく使われるものに，結論の否定を仮定したうえで矛盾を導く**背理法**がある。その手順は次のようなものであった。

背理法の流れ

① p かつ $\overline{q}$ を仮定する。

② ①のもとで議論すると

(i)　数学的事実

(ii)　$\overline{q}$ と仮定したこと

(iii)　p であること

のいずれかに矛盾する。

③ ②により，$p\Longrightarrow q$ が真であると示せる。

結論を否定したうえで議論すると，何かに矛盾が生じるということである。必要十分条件の問題などでどう示せばよいか分かりにくいときなどにも重宝する。

また背理法を用いると思えなかったとしても，問題文に書いてある場合以外を考察することはとても大切で，q が正しいかどうか分からないのだから $\overline{q}$ も考えてみなくてはならない。

2°　この事実から分かる通り，係数比較ができる。問題で出題されるときには α が $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ などの場合が多いが，α は無理数ならよい。よくあるのは

$$a+b\sqrt{2}=0\Longrightarrow a=b=0$$

などだが，

$$a+b(1+\sqrt{2})=0\Longrightarrow a=b=0$$

でもよいのである。いちいち展開して考えるのではなく，$1+\sqrt{2}$ が無理数であると考えて係数比較にもち込めるとよい。

3°　係数比較がらみの内容として，次もある。

p，q，r，s を実数，α を虚数とするとき，次が成り立つ。

(1)　$p+q\alpha=0\Longrightarrow\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases}$

(2)　$p+q\alpha=r+s\alpha\Longrightarrow\begin{cases}p=r\\q=s\end{cases}$

証明も全く同じである。ベクトルにおける係数比較も同じ内容である。

例題 5

$$2a-3\sqrt{3}+b(4+2\sqrt{3})=0$$

をみたす有理数 a，b の値を求めよ。

【解答】

与式を $\sqrt{3}$ に注意して整理すると，

$$2(a+2b)+(-3+2b)\sqrt{3}=0$$

a，b は有理数より，$2(a+2b)$，$-3+2b$ は有理数で $\sqrt{3}$ は無理数だから，

$$2(a+2b)=-3+2b=0$$

$\therefore$　$b=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$，$a=-2b=\boldsymbol{-3}$

【注】

1°　有理数，無理数がらみの係数比較を利用するだけである。そのために，文字に注意するのでなく無理数 $\sqrt{3}$ に注意して式を整理する必要がある。

1.1.4　1 次不等式

1 次不等式 $ax>b$ は，a の符号に注意して変形する。特に，分数，不等式，$\sqrt{}$（2 乗）は同値性が崩れやすい（余計な解が含まれやすい）ので，式変形に注意する。

(i)　$a>0$ のとき

$$ax>b \Longleftrightarrow x>\frac{b}{a}$$

(ii)　$a<0$ のとき

$$ax>b \Longleftrightarrow x<\frac{b}{a}$$

である。(ii)のように，負の数のかけ算と割り算で不等号の向きが変化するのが注意点である。$>$ が $<$，$\leqq$，$\geqq$ に代わっても基本的に同じである。

なお，出題されるときには $ax>b$ の形でないことも多いので，

①　分数の解消，かっこの展開などを実行

②　移項などにより $ax>b$，$ax<b$ などの形を目指す（このとき，a が正になるようにする方が間違いが少ない）

という手順で式変形をする。その後，a の符号に注意して割り算すれば解が得られる。

例題 6

不等式

$$\frac{x+1}{3}<\frac{5}{2}x+a$$

の解を求めよ。また，この不等式をみたす最小の整数が 1 となるような実数 a の条件を求めよ。

【解答】

与式に 6 をかけて，

$$2x+2<15x+6a$$

$$2-6a<13x$$

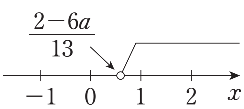
$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{2-6a}{13}<x}$$

この式をみたす最小の整数が 1 だから，

$$0\leqq\frac{2-6a}{13}<1$$

$$0\geqq 6a-2>-13$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-\frac{11}{6}<a\leqq\frac{1}{3}}$$



【注】

1°　前半は不等号の向きに注意して計算するだけである。後半は最小の整数が 1 という条件を数直線上で考えて，$\frac{2-6a}{13}$ がどこにいるかを考えればよい。また，最小の整数が 1 なので，

$x=1$ が $\frac{2-6a}{13}<x$ をみたす

$x=0$ が $\frac{2-6a}{13}<x$ をみたさない

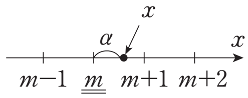
$\Longleftrightarrow x=0$ が $\frac{2-6a}{13}\geqq x$ をみたす

と考えても同じ式が立式できる。このように条件を考える際，解になるかどうかを考えると楽に立式できることも少なくない。

1.1.5　整数部分，小数部分

$$m\leqq x<m+1$$

をみたす m を x の**整数部分**といい，$x-m$（$=\alpha$ とする）を x の**小数部分**という。したがって，



$$x=m+\alpha\quad(0\leqq\alpha<1)$$

が成り立つ。

例題 7

2 次方程式

$$x^2-x-1=0$$

の解のうち大きいものを α，小さいものを β として，α の整数部分を a，小数部分を b と定めるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b を求めよ。

(2)　a^2+ab+b^2 を求めよ。

(3)　b，$\frac{1}{\alpha}$，β^2 のうち最小の値を求めよ。

【解答】

(1)　解の公式により，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

だから，$2<\sqrt{5}<3$ に注意して，

$$\frac{3}{2}<\alpha<2$$

よって，

$$a=\boldsymbol{1},\quad b=\alpha-a=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) $a^2+ab+b^2=a^2+b(a+b)$

$=1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\mathbf{2}$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=b$

$\beta^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\beta^2-b=\dfrac{3-\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}{2}$

$=2-\sqrt{5}=\sqrt{4}-\sqrt{5}<0$

だから，最小の値は β^2 で，

$\beta^2=\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

【注】

1° 整数部分，小数部分の定義に注意して a，b の値を求めつつ，

$\alpha=a+b$

を用いて計算する。解答では $2<\sqrt{5}<3$ ではさんでいるが，実戦的には

$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236\cdots$

と近似値を用いて計算してよい。ただ，近似値を知らない値が出ることもあるので，その際は近似値を見つける必要がある。たとえば $\sqrt{43}$ では，

$6=\sqrt{36}<\sqrt{43}<\sqrt{49}=7$

より，

$\sqrt{43}\fallingdotseq 6.\cdots$

と求められる。このとき，小数第1位まで考えなければならないこともある。

2° たまに(3)のような大小比較が話題になることもある。近似値に注意して比べるか，解答のように差をとればよい。

1.1.6 絶対値

数直線上で点 A(a) と原点 O の距離を a の**絶対値**といい，$|a|$ で表す。したがって，

$$|\boldsymbol{a}|=\begin{cases}\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}\geqq 0)\\ -\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}<0)\end{cases}$$

である。絶対値がらみの公式として次のものがある。

(1) $|\boldsymbol{x}|\geqq \mathbf{0}$，$|-\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$，$|\boldsymbol{x}|^2=\boldsymbol{x}^2$

(2) $a\geqq 0$ のとき

$|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{a}\iff \boldsymbol{x}=\pm\boldsymbol{a}$

(3) 実数 b に対して，

$|\boldsymbol{x}|\leqq \boldsymbol{b}\iff -\boldsymbol{b}\leqq\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}$

$|\boldsymbol{x}|\geqq \boldsymbol{b}\iff \boldsymbol{x}\leqq-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\leqq\boldsymbol{x}$

【注】

1° 特に絶対値の方程式(2)，不等式(3)の変形が大切である。(3)の b は任意の実数で成り立つことに注意する。したがって，

$|2x-3|<x$

のような形であっても

$-x<2x-3<x$

と式変形してよいのである。

例題8

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x+2|=3$

(2) $|3x-2|\leqq 3$

(3) $|4x-3|>x$

(4) $3|x-2|+|x-1|=4$

【解答】

(1) $x+2=\pm 3$

$\therefore\ \boldsymbol{x=1,\ -5}$

(2) $|3x-2|\leqq 3$

$-3\leqq 3x-2\leqq 3$

$-1\leqq 3x\leqq 5$

$\therefore\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{5}{3}}$

(3) $4x-3<-x$，$x<4x-3$

$\therefore\ \boldsymbol{x<\dfrac{3}{5},\ 1<x}$

(4) (i) $x\geqq 2$ のとき

$3(x-2)+(x-1)=4$

$4x=11\qquad\therefore\ x=\dfrac{11}{4}$

これは $x\geqq 2$ をみたし適する。

(ii) $1\leqq x\leqq 2$ のとき

$3\{-(x-2)\}+(x-1)=4$

$-2x=-1\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

これは $1\leqq x\leqq 2$ をみたさず不適。

(iii)　$x \leqq 1$ のとき

$$3\{-(x-2)\}-(x-1)=4$$

$$-4x=-3 \qquad \therefore \quad x=\frac{3}{4}$$

これは $x \leqq 1$ をみたし適する。

以上により，

$$\boldsymbol{x=\frac{3}{4},\ \frac{11}{4}}$$

【注】

1°　(1)，(2)，(3)は機械的に式変形を実行して計算する。(4)のように絶対値が2つになったら真面目に場合分けを実行することになる。絶対値記号の中身 $x-2$，$x-1$ の符号に注意するので，

$$x=1,\ 2$$

の前後で場合を分けて通算3通りの場合分けを実行する。

2°　(4)はグラフ

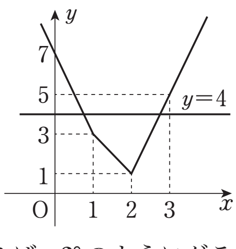
$$y=3|x-2|+|x-1|$$

を考えてもよい。解答のように真面目に場合を分けて関数を求めてもよいし，絶対値記号の中身が1次式であることに注意すると，絶対値を外したとしても得られる関数は1次以下の関数で直線を表すから，場合分けを行った各区間の2点を結ぶことで求めることもできる。場合分けを $x=1$，2 で行うことから，

$$(0,\ 7),\ (1,\ 3),$$

$$(2,\ 1),\ (3,\ 5)$$

を結ぶと折れ線としてグラフが得られる。



3°　(4)の場合分けが面倒ならば，**2°** のようにグラフで考えるか，あるいは

$$|x|=a(\geqq 0) \iff x=\pm a$$

を用いる。

$$3|x-2|+|x-1|=4$$

$$\iff 3|x-2|=4-|x-1|$$

$$\iff \begin{cases} 4-|x-1| \geqq 0 \\ 3(x-2)=\pm(4-|x-1|) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |x-1| \leqq 4 \\ |x-1|=10-3x,\ 3x-2 \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

ここで

$$① \iff -4 \leqq x-1 \leqq 4 \iff -3 \leqq x \leqq 5$$

(i)　$|x-1|=10-3x \ \left(-3 \leqq x \leqq \dfrac{10}{3}\right)$ のとき

$$x-1=\pm(10-3x)$$

$$x=\frac{11}{4},\ \frac{9}{2} \qquad \therefore \quad x=\frac{11}{4}$$

(ii)　$|x-1|=3x-2 \ \left(\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 5\right)$ のとき

$$x-1=\pm(3x-2)$$

$$x=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4} \qquad \therefore \quad x=\frac{3}{4}$$

以上より，

$$x=\frac{3}{4},\ \frac{11}{4}$$

1.1.7　平方根の計算

負でない実数 a に対して，平方（2乗）すると a になる数を a の**平方根**という。$a>0$ であれば，a の平方根は2個存在し，正の平方根を $\sqrt{a}$，負の平方根を $-\sqrt{a}$ で表す。$a=0$ であれば，a の平方根は0だけで，$\sqrt{0}=0$ が成り立つ。センター試験時代から，平方根の計算が随所で問われている。有理化はもちろん，$\sqrt{\quad}$ の中身が2乗になって絶対値とからむことなどもある。基本的な計算が素早くできるようにしておくのがよい。主な計算規則は次である。

(i)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(ii)　$a \geqq 0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(iii)　$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

例題9

次の各式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{2\sqrt{2}-3}$

(2)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(3)　$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(4)　$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

【解答】

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{2\sqrt{2}-3}$

$=\sqrt{2}-1+2(2\sqrt{2}+3)$

$=\mathbf{5\sqrt{2}+5}$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\mathbf{\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})}$

(3) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$=\mathbf{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

【注】

1° A^2-B^2 の形になるように有理化していく。$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ なら $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ なら $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を施すのがよい。

2° (2)は $\sqrt{}$ を1つずつ解消していく。いきなり2つの $\sqrt{}$ を有理化することはできないので，まず1つだけ解消するのである。$(1+\sqrt{2})^2$ を展開すると3が出るので，$\sqrt{3}$ から解消すると計算が少し容易になる。気がつかなければ，とりあえず $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ のいずれかを解消すると考えて有理化してみればよいだけである。

3° (3)，(4)は二重根号についての処理である。二重根号は

① $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ の形にする。

② 足して a，かけて b となる2数 p，q $(p<q)$ を見つける。

③ $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{q}\pm\sqrt{p}$ (複号同順)

として扱う。①のように $\sqrt{}$ の係数に2がないとどうしようもないので，(4)では分子，分母に2をかけている。また一般に，

$\sqrt{a^2}=|a|$

なので，

$\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2}$

のように，( )の中身を $\sqrt{大}-\sqrt{小}$ としておくとまちがえにくい。

1.1.8 対称式の計算

センター試験の頃から，無理数を含む値についての計算が要求されることがよくある。a^2+b^2，ab などのように文字を交換しても不変な式を**対称式**（簡単に言って，2文字の次数と係数が等しい式）といい，無理数を含む値の計算ではよく現れる。非対称でひたすら計算しないといけないものもあるが，対称なものでは次の式変形

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

が問われる。なお，3次式は

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

で代用できることも多い。また，$a-b$ の値を

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

と変形して求めることもある。基本的な変形は把握しておきつつも，問題の誘導に乗りながら計算するのが現実的である。

例題 10

$2x^2+2x-3=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$

(4) $\alpha^3+\beta^3$

(5) $4\alpha^4-16\beta$

【解答】

$2x^2+2x-3=0$

において，解の公式により，

$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$

$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

(1) $\alpha+\beta=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

$=\mathbf{-1}$

(2)　$\alpha\beta=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

$=\dfrac{1-7}{4}=-\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(3)　$(\text{与式})=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\left(-\dfrac{3}{2}\right)}{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{16}{9}}$

(4)　$(\text{与式})=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-1)^3-3\left(-\dfrac{3}{2}\right)(-1)$

$=-1-\dfrac{9}{2}=-\boldsymbol{\dfrac{11}{2}}$

(5)　α は

$2x^2+2x-3=0$

の解だから，

$2\alpha^2=-2\alpha+3$

$4\alpha^4=(-2\alpha+3)^2$

$=4\alpha^2-12\alpha+9$

$=2(-2\alpha+3)-12\alpha+9$

$=15-16\alpha$

したがって，

$(\text{与式})=15-16(\alpha+\beta)$

$=15-16(-1)=\mathbf{31}$

【注】

1°　解の公式から α，β が求められるので，それを用いて計算すればよい。数学Ⅱで学ぶ解と係数の関係

「$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

の 2 解を α，β とすると，

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$」

を用いると，

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{2}=-1$，$\alpha\beta=\dfrac{-3}{2}$

と素早く求められる。

2°　(3)では通分した後，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

を用いる。2 乗の和単体で出題されることもあれば，このように分数で出題されることもある。

3°　(4)は，(3)で $\alpha^2+\beta^2$ を計算しているので，

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

を用いて計算してもよい。

4°　(5)のような（高次の）代入しにくい値の計算では，「**もとの方程式を用いて次数下げ**」を実行する。具体的には代入か割り算で処理する。ここでは，代入から考えている。2 次方程式の解 α の整式なら，

$\alpha^2=-\alpha+\dfrac{3}{2}$

により，1 次以下まで次数が下げられるのである。なお，割り算すると考えて，$4\alpha^4$ を $2\alpha^2+2\alpha-3$ で割り算してから代入してもかまわない。

1.1.9　共通解

共通解は，方程式と不等式の場合があるが，いずれにせよ連立して得られる解として導かれる。2 つの方程式の共通解が話題のとき，片方の方程式を解くことができるなら，解いた上で，求められた解がもう片方の方程式の解である（つまり，代入して成り立つ）条件を導けばよい。一方，どちらの方程式も解きにくい場合の扱い方は主に次の 2 通りである。

共通解の扱い方

(i)　文字消去

(ii)　次数下げ

基本的に等式条件は 1 文字消去すると使い切ったことになる。だから，文字消去ができるならそれを優先すればよい。ただ，いつも文字消去ができるわけではないので，できないときは最高次の項を消去する，すなわち次数を下げると考える。

例題 11

2 つの方程式

$x^2+ax-2=0$

$x^2-2x+a=0$

が共通解をもつとき，a の値を求めよ。

【解答】

共通解を $x=p$ として,

$$\begin{cases} p^2+ap-2=0 & \cdots\cdots① \\ p^2-2p+a=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より,

$$a=-p^2+2p \qquad \cdots\cdots②'$$

だから,①に代入して,

$$p^2+p(-p^2+2p)-2=0$$
$$p^3-3p^2+2=0$$
$$(p-1)(p^2-2p-2)=0 \qquad \cdots\cdots③$$

$\therefore\quad p=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

(i) $p=1$ のとき

②′ より, $a=1$

(ii) $p=1\pm\sqrt{3}$ のとき

$p^2=2p+2$ だから, ②′ より,

$$a=-(2p+2)+2p=-2$$

以上(i), (ii)より,

$$a=\mathbf{1},\ \mathbf{-2}$$

【注】

1° 共通解の問題だから, 文字消去を実行している。同値変形

$$\{①,\ ②\}\Longleftrightarrow\{③,\ ②'\}$$

に注意する。

2° 代入しにくい $p=1\pm\sqrt{3}$ を考えるときには, もとの方程式

$$p^2-2p-2=0$$

を用いて次数を下げるとよい。

$$p^2=2p+2$$

で代入するか, 代入したい式を p^2-2p-2 で割り算すればよい。

3° 共通解から次数下げを考えてもよい。

【解答 2】

共通解を $x=p$ として,

$$\begin{cases} p^2+ap-2=0 & \cdots\cdots① \\ p^2-2p+a=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①−②より,

$$(a+2)p-(a+2)=0$$
$$(a+2)(p-1)=0 \qquad \cdots\cdots④$$

$\therefore\quad a=-2,\ p=1$

(i) $a=-2$ のとき

①より,

$$p^2-2p-2=0 \qquad \therefore\quad p=1\pm\sqrt{3}$$

(ii) $p=1$ のとき

①より, $a=1$

以上(i), (ii)より,

$$a=\mathbf{1},\ \mathbf{-2}$$

【注】

4° 同値変形

$$\{①,\ ②\}\Longleftrightarrow\{④,\ ①\}$$

に注意する。④=①−②だから,

$$\{①,\ ②\}\Longleftrightarrow\{④,\ ②\}$$

と考えてもよい。

例題 12

x についての 2 つの不等式

$$\begin{cases} x-\dfrac{2-x}{3}\leqq 6 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{5x-a}{3}<1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

がある。ただし, a を実数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) ①, ②を解け。

(2) ①, ②をみたす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(3) ①, ②をみたす整数 x がちょうど 4 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

【解答】

(1) ①より,

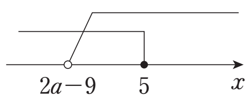
$$3x-(2-x)\leqq 18$$
$$4x\leqq 20 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{x\leqq 5}$$

②より,

$$3(3x-1)-2(5x-a)<6$$
$$-x+2a-3<6$$

$\therefore\quad \boldsymbol{2a-9<x}$

(2) ①, ②の共通部分がある条件だから,



$$2a-9<5$$

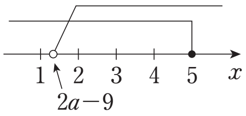
$\therefore\quad \boldsymbol{a<7}$

(3) ①かつ②の領域に含まれる 4 個の整数が 2, 3, 4, 5 となるので, ②に 2 が含まれ, 1 が含ま

れない条件であり，

$$1 \leqq 2a-9 < 2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{5 \leqq a < \frac{11}{2}}$$



【注】

1°　連立不等式であっても解けるなら解く。(1)の誘導があるが，なくてもとりあえず解いておくぐらいが望ましい。解いた結果に注意して(2)，(3)の条件を考察することになる。

2°　(2)は①，②が共通解をもつ条件だから，数直線上で，$2a-9$ が 5 の左にくることが分かり，$2a-9=5$ のときは共通解がないから不適と考えて立式できる。

3°　(3)は $2a-9$ を数直線上の左方向へ少しずつ動かしていけばよい。5 から順番に共通解になるので，4 個の整数は 2，3，4，5 となるのである。したがって，$2a-9$ は 1 と 2 の間であると分かるが，境界が気になる。解答のように入るかどうかと考えると素早く考察できる。2 は入るから $2a-9<x$ に代入して成立し，1 は入らないから $2a-9<x$ 以外の $2a-9 \geqq x$ に代入して成立する。もちろん $2a-9=1$，2 のときにどうなるかを丁寧に考えてもよい。

4°　a に整数（(2)であれば最大の整数）という条件が追加されることもあるが，条件を考察できないと始まらない。数直線などの図を用いながら，どのようになればよいのかを考察できるようにしたい。

1.2　整数(1)

ここでは，整数固有の性質を順に学んでいく。以下での文字は特に断らない限り整数とする。

1.2.1　除法の原理

整数の集合においては，除法（割り算）を行うと，割り切れて商が整数になる場合と，割り切れず整数にならない場合がある。割り切れない場合は余りが出る。たとえば7を3で割るとき，2余り1となる。7の中に3個ずつのものを2セット作って，作り切れなかった部分が余りである。すなわち，

余り$=7-2\cdot3=1$

となり，これを定式化したものが次の除法の原理である。

除法の原理

aを整数，bを正の整数とするとき，

$$a=bq+r,\ 0\leqq r<b$$

をみたす整数q，rがただ1組存在する。q，rを，aをbで割ったときの**商**，**余り（剰余）**という。

除法の原理から得られる用語を確認する。

(1)「aはbの**倍数**」$\Longleftrightarrow$「$a=bq$なるqがある」
このとき，「bはaの**約数**」という。除法の原理により，これはaをbで割った余りrが0であることに他ならない。よって，「aはbで割り切れる」「bはaを割り切る」とも言える。なお，$0=0\cdot x$より，0は任意の整数$x(\neq0)$の倍数で，$x=1\cdot x$より，1は任意の整数の約数である。

(2) 2つ以上の整数a，b，c，……に共通な倍数をそれらの整数の公倍数という。式では

「gがaとbの公倍数」

$\Longleftrightarrow$「$g=am$，$g=bn$となる整数m，nがある」

と表せるが，「gはaの倍数かつbの倍数」というだけのことである。正の公倍数のうち最小のものを**最小公倍数**という。

(3) 2つ以上の整数a，b，c，……に共通な約数をそれらの整数の公約数という。式で表現するならば，

「ℓがaとbの公約数」

$\Longleftrightarrow$「$a=\ell m$，$b=\ell n$となる整数m，nがある」

と表せるが，「ℓはaの約数かつbの約数」というだけのことである。公約数のうち最大のものを**最大公約数**という。また，aとbの最大公約数が1であるとき，aとbは**互いに素**という。

(4)「pが**素数**」

$\Longleftrightarrow$「2以上の整数pの正の約数は1とpのみ」

素数がらみの問題では，

(i) 素数で偶数は2だけ（3以上の素数は奇数）

(ii)「mnが素数pで割り切れる」

$\Longrightarrow$「m，nの少なくとも一方はpで割り切れる」

特にa，bを自然数，pを素数とするとき，

「$ab=p\Longrightarrow(a,\ b)=(1,\ p),\ (p,\ 1)$」

(iii) 自然数m，n，素数pに対して，

「m^nがpの倍数$\Longrightarrow m$がpの倍数」

を用いる。

実際の問題においては，

「商と余りがただ一通り（一意性という）

$\Longrightarrow$式の両辺で比較できる」

と考えることが多い。式の左辺（右辺）で得られた余りが右辺（左辺）の余りと一致するという使い方をする。

1.2.2　素因数分解

約数を考察するのに素因数分解が有用である。ここではそれについて確認する。

素因数分解の一意性

2以上の整数は，素因数の順序を無視するとただ一通りに素因数分解が可能である。

この性質を用いることにより，前節の(4)(ii)の性質も導け，約数を列挙したり，文字の個数よりも少ない数の方程式（不定方程式という）の整数解を考察したりすることなどが可能となる。

例題１

次の各問いに答えよ。

(1) 4680 を素因数分解せよ。

(2) $\sqrt{4680n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(3) $\sqrt{\dfrac{4680}{n}}$ が自然数となるような自然数 n を小さい方から 2 つ求めよ。

【解答】

(1) $4680=\mathbf{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13}$

(2) $\sqrt{4680n}=\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13n}$

$=6\sqrt{2\cdot 5\cdot 13n}$

これが自然数となるのは，

$n=2\cdot 5\cdot 13\cdot N^2$（$N$：自然数）　……①

のときだから，最小の n は，

$n=2\cdot 5\cdot 13=\mathbf{130}$

(3) $\sqrt{\dfrac{4680}{n}}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot\dfrac{2\cdot 5\cdot 13}{n}}$

これが自然数となるのは

$\begin{cases} n \text{ が } 4680 \text{ の約数} \\ ① \end{cases}$

のときだから，n を小さい方から 2 つ求めると，

$n=2\cdot 5\cdot 13,\ 2^3\cdot 5\cdot 13$

∴　$n=\mathbf{130,\ 520}$

【注】

1°　素因数分解を利用する。小さい素数（2，3，5，7，……）から順に割り算すれば素因数分解が得られるので，その結果を用いながら $\sqrt{\ }$ が外れる条件（$\sqrt{\ }$ 内が平方数）を考えることになる。

例題２

次の各問いに答えよ。

(1) 72 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 72 の正の約数のうち偶数であるものの個数を求めよ。

(3) 72 の正の約数の和を求めよ。

(4) 72 の正の約数の積は，2 で最大何回割り切れるか。

【解答】

(1)　$72=2^3\cdot 3^2$

となり，正の約数は，

$2^a\cdot 3^b$　$(0\leqq a\leqq 3,\ 0\leqq b\leqq 2)$

で表せる。正の約数と整数の組 $(a,\ b)$ は 1 対 1 に対応するから，a，b が何通りかと数えて，正の約数の個数は

$4\cdot 3=$**12（個）**

(2)　$72=2^3\cdot 3^2$

となり，正の約数は，

$2^a\cdot 3^b$　$(0\leqq a\leqq 3,\ 0\leqq b\leqq 2)$

で表せる。このうち偶数であるものは a が 0 でない場合の数だから，a は 1，2，3 の 3 通りで，b が 0，1，2 の 3 通りである。

∴　$3\cdot 3=$**9（個）**

(3)　正の約数の和は，

$2^0(3^0+3^1+3^2)+2^1(3^0+3^1+3^2)$

$+2^2(3^0+3^1+3^2)+2^3(3^0+3^1+3^2)$

$=(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2)$

$=15\cdot 13$

$=\mathbf{195}$

(4)　正の約数は

$2^a\cdot 3^b$　$(0\leqq a\leqq 3,\ 0\leqq b\leqq 2)$

で表せるから，a を 1 つ決めたとき $b=0$，1，2 の 3 通りがあることに注意して，これらをかけると 2^a が 3 個ずつ出る。したがって，正の約数をすべてかけると

$(2^1\cdot 2^1\cdot 2^1)(2^2\cdot 2^2\cdot 2^2)(2^3\cdot 2^3\cdot 2^3)\times$(奇数)

$=2^{3+6+9}\times$(奇数)

$=2^{18}\times$(奇数)

となり，2 で最大 **18 回**割り切れる。

【注】

1°　$N=p^aq^br^c\cdots\cdots$（素因数分解）

と表されたとき，Nの正の約数は

$p^iq^jr^k\cdots\cdots$

$(0\leqq i\leqq a,\ 0\leqq j\leqq b,\ 0\leqq k\leqq c)$

と表せるので，その個数は，

$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$（個）

である。正の約数に条件が付いた場合は，この定義に戻って，正の約数の指数部分がどうなるかなどを考えていけばよい。

2° 正の約数の和は，解答同様に考えて

$$(p^0+p^1+p^2+\cdots\cdots+p^a)$$
$$\cdot(q^0+q^1+q^2+\cdots\cdots+q^b)$$
$$\cdot(r^0+r^1+r^2+\cdots\cdots+r^c)\cdots\cdots$$

と表せる。

3° 正の約数の積は，すべて書き上げてかければよい。2^a が何個出てくるかを考察するだけである。

例題 3

(1) x, y, z, a を正の整数とするとき，

$$175x=1323y=5832z=a^2$$

をみたす最小の a の値を求めよ。

(2) $\dfrac{m}{175}$, $\dfrac{m^2}{1323}$, $\dfrac{m^3}{5832}$

がすべて整数となるような正の整数 m のうち，最小のものを求めよ。

【解答】

(1) $175=5^2\cdot7$, $1323=3^3\cdot7^2$, $5832=2^3\cdot3^6$

これらの公倍数であり，平方数となるのは，各素因数の指数が偶数となるものである。そのうち指数が最小となるものを考えると，

$$2^4\cdot3^6\cdot5^2\cdot7^2=(2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7)^2=(3780)^2$$

$\therefore\quad a=\mathbf{3780}$

(2) $\dfrac{m}{5^2\cdot7}$, $\dfrac{m^2}{3^3\cdot7^2}$, $\left(\dfrac{m}{2\cdot3^2}\right)^3$

これらがすべて整数となるので，m は $5^2\cdot7$, $3^2\cdot7$, $2\cdot3^2$ のすべてで割り切れる。このような m のうち最小のものは，$5^2\cdot7$, $3^2\cdot7$, $2\cdot3^2$ の最小公倍数だから，

$$m=2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7=\mathbf{3150}$$

【注】

1° 素因数分解して考える。平方数から各素因数の指数が偶数であること，分数が整数になるから約分できることに注意する。

例題 4

$\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ が整数となるような整数 x の値を求めよ。

【解答】

$$x^2-3x=(x+1)(x-4)+4$$

だから，

「$\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ が整数」

$\Longleftrightarrow$「$\dfrac{(x+1)(x-4)+4}{x+1}$ が整数」

$\Longleftrightarrow$「$x-4+\dfrac{4}{x+1}$ が整数」

$\Longleftrightarrow$「$\dfrac{2^2}{x+1}$ が整数」

$\Longleftrightarrow x+1$ が 2^2 の約数

$\Longleftrightarrow x+1=\pm1$, ±2, ±4

$\Longleftrightarrow x=\mathbf{-2,\ 0,\ -3,\ 1,\ -5,\ 3}$

【注】

1° 分数式は帯分数にして扱う。整数問題では，不定方程式をある（次数の低い）1つの文字について解いた後に分数が出てくることが多いので，帯分数にして，

(i) $\dfrac{c(\text{整数})}{f(x)}=\text{整数}\Longrightarrow f(x)$ は c の約数

(ii) $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\text{整数}\Longrightarrow g(x)=0$ or $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|\geqq1$

のいずれかで扱うことになる。

$n!$ 内の素因数の個数に関する問題もあり，これは倍数の個数の和で求めることができる。次の例題5を通して学んで欲しい。

例題 5

50! を素因数分解したときの2の指数を求めよ。また，50! が 6^m で割り切れるような最大の整数 m を求めよ。

【解答】

50! に含まれる素因数2の個数を数えればよい。1から50の中に

2の倍数は，$\dfrac{50}{2}=25$ より，25個

2^2 の倍数は，$\dfrac{50}{2^2}=12.5$ より，12個

2^3 の倍数は，$\dfrac{50}{2^3}=6.25$ より，6個

2^4 の倍数は，$\dfrac{50}{2^4}=3.1\cdots$ より，3 個

2^5 の倍数は，$\dfrac{50}{2^5}=1.5\cdots$ より，1 個

あるから，求める指数は

$$n=25+12+6+3+1=\mathbf{47}$$

また，$6^m=2^m\cdot3^m$ だから，50! に含まれる素因数 3 の個数を数える。1 から 50 の中に，

3 の倍数は，$\dfrac{50}{3}=16.6\cdots$ より，16 個

3^2 の倍数は，$\dfrac{50}{3^2}=5.5\cdots$ より，5 個

3^3 の倍数は，$\dfrac{50}{3^3}=1.8\cdots$ より，1 個

あるから，素因数 3 の個数は

$$16+5+1=22 \text{（個）}$$

である。求める m は47, 22 のうち小さい方だから，

$$m=\mathbf{22}$$

【注】

1°　倍数の個数を数えると楽である。1 から n までの p の倍数の個数は，$\dfrac{n}{p}$ の整数部分 $\left(\left[\dfrac{n}{p}\right]\right.$ と書く$\left.\right)$ で求められる。ただし，2^2 の倍数は素因数 2 を 2 つもつので，2 の倍数でカウントした後，もう一度カウントする必要がある。2^3の倍数ならさらにもう一回などと考えていく。特に下のような表で横に数えている意識をもつとよい。

2	4	6	8	10	…	48	50	○の数
○	○	○	○	○	…	○	○	$\dfrac{50}{2}$
	○		○		…	○		$\left[\dfrac{50}{2^2}\right]$
			○		…	○		$\left[\dfrac{50}{2^3}\right]$
					○	○		$\left[\dfrac{50}{2^4}\right]$
					○			$\left[\dfrac{50}{2^5}\right]$

表を縦に見て，p^k で割り切れるが p^{k+1} で割り切れないもの（p でちょうど k 回だけ割り切れる数）の個数を数えて考える方法もあるが，もちろん結果は一致するので，上のように表を横に数える方が速くてよい。

2°　6 のような合成数（1 でも素数でもない自然数のこと）で割るときは，素因数 2, 3 の個数のうち小さい方に注目すればよい。

3°　この問題の m を次のように定義する場合もある。

「自然数 n が 6^m で割り切れるが 6^{m+1} で割り切れないとき，$f(n)=m$ と表す。$f(50!)$ を求めよ。」

結局 50! を素因数分解したときの 2 の指数と 3 の指数のうち小さい方が話題になっているだけである。

1.2.3　Euclid の互除法

除法の原理により約数，倍数などの用語が定義できた。そのうち最大公約数に関しては，大きな数を素因数分解して考えるのは面倒である。そこで，割り算を繰り返すことで最大公約数を効率よく求める方法がある。これは**Euclid の互除法**（または単に互除法ともいう）と呼ばれている。

互除法の原理

整数 a，b の最大公約数を $(a,\ b)$ と書くとする。a を b で割った余りを r とすると，

$$(a,\ b)=(b,\ r)$$

が成り立つ。一般に整数 q に対して，

$$(a,\ b)=(b,\ a-bq)$$

が成り立つ。

【証明】

$g_1=(a,\ b)$，$g_2=(b,\ r)$，a を b で割った商を p として，

$$a=bp+r,\ 0\leqq r<b \qquad \cdots\cdots①$$

と表せるので，

$$r=a-bp \qquad \cdots\cdots②$$

g_1 は a，b の公約数だから，②より r の約数でもある。したがって，g_1 は b，r の公約数で，g_2 は b，r の最大公約数だから，

$g_1 \leqq g_2$ ……③

g_2 は b, r の公約数だから，①より a の約数でもある。したがって，g_2 は a, b の公約数で，g_1 は a, b の最大公約数だから

$g_2 \leqq g_1$ ……④

③，④より，

$g_1 = g_2$

$(a,\ b) = (b,\ a - bq)$ については，

$r_1 = a - bq$

とおけば，上の議論と同様にして示せる。 ■

【注】

1° 最大公約数を設定しておき，約数であるという条件と除法の原理により得られる式から，どの文字の約数になるかを考えていくだけである。ここでは細かい定式化をしていないが，約数になるところも式で議論すると，

「$g_1 = (a,\ b)$ より，整数 A, B に対して，

$a = g_1A$, $b = g_1B$, $(A,\ B) = 1$

と表せるので，②より，

$r = g_1(A - Bp)$

と書けて，g_1 は r の約数である」

などと議論していけばよい。

2° 公約数の集合について

$\{a,\ b\ の公約数\} = \{b,\ r\ の公約数\}$

が成り立つことから示してもよい。

$A = \{a,\ b\ の公約数\}$, $B = \{b,\ r\ の公約数\}$

と定めて，

$x \in A \Longrightarrow x \in B$, $x \in B \Longrightarrow x \in A$

の両方を示せばよく，議論の要旨は【解答】と変わらない。

Euclid の互除法を考える際には次の 2 つの事実を用いている。

a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると，

$r \neq 0$ なら，$(a,\ b) = (b,\ r)$

$r = 0$ なら，$(a,\ b) = b$

具体的な 2 数 1989，520 で考えてみよう。

$1989 = 520 \cdot 3 + 429$

$520 = 429 \cdot 1 + 91$

$429 = 91 \cdot 4 + 65$

$91 = 65 \cdot 1 + 26$

$65 = 26 \cdot 2 + 13$

$26 = 13 \cdot 2$

よって，

$(1989,\ 520) = (520,\ 429)$

$= (429,\ 91) = (91,\ 65)$

$= (65,\ 26) = (26,\ 13) = 13$

と求められる。一般的な手順は次の通りである。

互除法の手順

① a を b で割ったときの商 q と余り r を求める。

② $r \neq 0$ ならば b と r で①を実行（割った商と余りを求める）し，$r = 0$ なら③に行く。

③ b が最大公約数となる。

なお，商と余りを図式化して求める方法もあり，次のように書く。

520×3

商			商
3	1989	520	1
	1560	429	
4	429	91	1
	364	65	
2	65	26	2
	52	26	
	$\boxed{13}$	0	

1980−560
（余り）

よって，最大公約数は 13 となる。

なお，最小公倍数も求められ，

$$1989 \cdot \frac{520}{13} = 79560$$

である。これは，

$a = gA$, $b = gB$, $(A,\ B) = 1$

のとき，最小公倍数 ℓ は

$\ell = gAB$

となることを用いている。

例題 6

1085 と 341 の最大公約数を求めよ。

【解答】

a，b の最大公約数を $(a,\ b)$ と表すと，

$$(1085,\ 341)=(1085-341\cdot 3,\ 341)$$
$$=(62,\ 341)=(62,\ 341-62\cdot 5)$$
$$=(62,\ 31)=\mathbf{31}$$

【注】

1°　大きい数字の最大公約数では Euclid の互除法を用いればよい。

2°　表を書くと，次のようになる。

3	1085	341	5
	1023	310	
2	62	$\boxed{31}$	
	62		
	0		

よって，最大公約数は 31 となる。

1.2.4　互いに素

最大公約数に関する大切な内容に「互いに素」がある。除法の原理から得られる用語でも確認したが，

「x と y が**互いに素**」

$\Longleftrightarrow$「x と y の最大公約数は 1」（定義）

である。また，正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を ℓ とすると，互いに素な整数 A，B を用いて，

$$a=gA,\ b=gB$$

と表せて，このとき

$$\boldsymbol{l=ABg,\ ab=gl}$$

が成り立つ。

例題 7

最大公約数が 30，最小公倍数が 2730 となる 2 つの自然数 a，b（$a<b$）の組を求めよ。

【解答】

互いに素な 2 つの自然数 A，B を用いて，

$$a=30A,\ b=30B$$

と表せる。最小公倍数は

$$30AB$$

だから，

$$30AB=2730$$
$$AB=91=7\cdot 13$$

$a<b$ より，$A<B$ に注意して，

$$(A,\ B)=(1,\ 91),\ (7,\ 13)$$

よって，

$$(a,\ b)=(\mathbf{30},\ \mathbf{2730}),\ (\mathbf{210},\ \mathbf{390})$$

【注】

1°　上で述べた事実「正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を ℓ とすると，互いに素な整数 A，B を用いて，

$$a=gA,\ b=gB$$

と表せて，このとき

$$\ell=ABg,\ ab=g\ell$$

が成り立つ」を用いることになる。

2°　$AB=91$

まで辿り着けば，符号と大小関係に注意して，各場合を調べ尽くすだけである。

互いに素を扱う際は条件内か，結論内かによって扱い方が変わる。

互いに素を扱う

(i)　条件内の互いに素

p，q を互いに素な整数とするとき，

(ア)　$\dfrac{aq}{p}=$整数 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{a}{p}=$整数

(イ)　$aq=p\cdot$(整数) $\Longleftrightarrow$ $a=p\cdot$(整数)

(ii)　結論内の互いに素

「x と y が**互いに素**」

$\Longleftrightarrow$「x と y をともに割り切る素数はない」

もしくは Euclid の互除法を用いる。

(i)の(ア)，(イ)はどちらも同じ意味であるが，(ア)の分数形の方が，$\Longrightarrow$ を考える際に「どこで約分するか」のように考えることができて扱いやすい。

互いに素を証明するときには，この言い換えを

した上で示す。否定的な命題になるので**背理法**を用いると証明しやすい。その際，公約数を素数でおくのがポイントとなる。また，互いに素が使われるものとして，a，b の最大公約数を $(a,\ b)$ と表すとき，

・$(n,\ 1)=1$，$(n,\ n+1)=1$

・素数 p が x の約数でないとき，$(x,\ p)=1$

・$(p,\ q)=1 \Longrightarrow (p^a,\ q^b)=1$（$a$，$b$：自然数）

・$(a,\ b)=1 \Longleftrightarrow (a+b,\ ab)=1$

$\qquad\qquad \Longleftrightarrow (a-b,\ ab)=1$

などがある。

例題 8

正の整数 n に対して，n と $n+1$ は互いに素であることを示せ。

【解答】

n，$n+1$ をともに割り切る素数 p が存在すると仮定すると，a，b を自然数として，

$$n=pa,\ n+1=pb$$

と表せる。n を消去すると，

$$p(b-a)=1$$

となるが，p は素数より成立せず矛盾。

よって，n と $n+1$ は互いに素である。 ■

【注】

1° 互いに素を証明するときは「ともに割り切る素数が存在する」と仮定して矛盾を導くとよい。慣れないうちは解答のように丁寧に書いて，慣れてきたら（n，$n+1$ の素因数を見る感覚が養われたら）差をとり，

$$(n+1)-n=1$$

から互いに素であると素早く議論すればよい。同様の議論により，k を整数として

$$kn+1,\ n \text{ も互いに素}$$

であると分かる。つまり，ある自然数 N を n で割って余りが1なら，N と n は互いに素になるわけである。

2° Euclid の互除法を用いると

$$(n+1,\ n)=(n+1-n,\ n)$$
$$=(1,\ n)=1$$

となり，素早く議論できる。

3° この例題で示したことは有名事実として記憶しておくのがよい。

例題 9

x，y，n は自然数とする。

(1) $x+y$，xy が互いに素であるための必要十分条件は x，y が互いに素であることを示せ。

(2) x，y，n は自然数とする。x，y が互いに素で $xy=n^2$ をみたすとき，x，y はともに平方数となることを示せ。

【解答】

(1) x，y が互いに素であるとき，$x+y$，xy をともに割り切る素数 p が存在すると仮定して，自然数 a，b に対して，

$$\begin{cases} x+y=pa & \cdots\cdots① \\ xy=pb & \cdots\cdots② \end{cases}$$

と表せる。p は素数だから，②より，

x は p の倍数，または，y は p の倍数

(i) x が p の倍数のとき，

$x=pc$（c：自然数）

と表せて，①より，

$y=p(a-c)$

したがって，p は x，y の公約数になるが，x，y は互いに素だから矛盾する。

(ii) y が p の倍数のとき，

$y=pd$（d：自然数）

と表せて，①より，

$x=p(a-d)$

したがって，p は x，y の公約数になるが，x，y は互いに素だから矛盾する。

(i)，(ii)より，$x+y$，xy は互いに素である。

逆に，$x+y$，xy が互いに素であるとき，x，y をともに割り切る素数 q が存在すると仮定して，自然数 c，d に対して，

$$x=qc,\ y=qd$$

と表せる。このとき，

$$x+y=q(c+d),\ xy=q^2cd$$

となり，q は $x+y$，xy の公約数だから，$x+y$，xy が互いに素であることに矛盾する。

よって，x，y は互いに素である。

以上により題意は成立する。■

(2) n の素因数 p に対して，n^2 の中に素因数 p は偶数個ある。xy が p の倍数で x，y が互いに素だから，偶数個の p はすべて x に含まれるか，すべて y に含まれるかのどちらかである。n の各素因数すべてでこのことが言えて，x，y ともに各素因数の個数は偶数個だから，平方数である。■

【注】

1° $x+y$，xy をともに割り切る素数 p が存在すると仮定したからこそ，②から x，y のいずれかに素因数 p が含まれると考えられるのである。公約数を設定するのでなく，素数を設定する意識をもっておきたい。文字が多く難しそうに見えるかもしれないが，$xy=pb$ から，

x は p の倍数 or y は p の倍数

を導くところがポイントである。感覚としては，「(かけて) 出てきた素数は中に入る」というものである。xy から（素数）p が出たら，x か y の中に入るという意識が欲しい。なお，②から素因数に注目することができなければ，x，y のうちの一文字を消去して，次のように考えてもよい。

「①より，$y=pa-x$ だから，②より，

$$x(pa-x)=pb$$

$$\therefore\quad x^2=p(ax-b)$$

p は素数だから，x の約数，つまり x が p の倍数である。」

結局得られる結果は同じだから，【解答】のようにできるのが簡明でよい。

2° (1)の事実は誘導なしで出題される可能性があるので，記憶しておくのが望ましい。

3° (2)では，x，y をともに割り切る素数はないので，n^2 の各素因数を x，y に分配する際，すべて x に入るか，すべて y に入るかしかない（x，y の両方に入るとともに p で割れて矛盾する）。

$$xy=(2^{\bigcirc}\cdot 3^{\bigcirc}\cdot 5^{\bigcirc}\cdots\cdots)^2$$

という形で考えて，2 を x，y に振り分けるなどと考えていく意識があるとよい。加えて平方数になる条件「各素因数の個数が偶数個」も考えればすぐに導ける。当然という感覚が持てるとよい。

例題 10

a，b を互いに素な正の整数とするとき，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数であることを示せ。

【解答】

既約分数でないと仮定すると，$3a+7b$，$2a+5b$ をともに割り切る素数 p が存在する。

A，B を正の整数として，

$$3a+7b=pA,\ 2a+5b=pB$$

と表せるから，

$$a=p(5A-7B),\ b=p(3B-2A)$$

となり，a，b がともに p で割り切れ矛盾する。

よって，$\dfrac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。■

【注】

1° 本質的には同じだが，一文字消去の要領で，分母と分子を連立してもよい。

$$5(3a+7b)-7(2a+5b)=a$$

$$-2(3a+7b)+3(2a+5b)=b$$

より，$3a+7b$，$2a+5b$ の公約数は a，b の公約数となる。

2° Euclid の互除法でもよい。整数 a，b の最大公約数を$(a,\ b)$ と表すと，整数 q に対して，

$$(a,\ b)=(a-bq,\ b)=(a,\ b-aq)$$

が成り立つ。

【解答 2】

a，b の最大公約数を $(a,\ b)$ とすると，$(a,\ b)=1$ のもとで，

$$(3a+7b,\ 2a+5b)=1$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}&(3a+7b,\ 2a+5b)\\&=(3a+7b-(2a+5b),\ 2a+5b)\\&=(a+2b,\ 2a+5b)\\&=(a+2b,\ 2a+5b-2(a+2b))\\&=(a+2b,\ b)\\&=(a+2b-2b,\ b)\end{aligned}$$

$=(a,\ b)$

$=1$ ■

1.2.5 整数の分類

2以上の整数mに対して，整数全体をmで割った余りにより分類することができる。たとえば$m=3$なら，整数を3で割った余りは0，1，2のいずれかであるから，整数全体は

$3k,\ 3k+1,\ 3k+2$（k：整数）

と3つの種類に分類することができる。なお，計算する上では余りの絶対値が最小になるように，

$3k,\ 3k+1,\ 3k-1$

の3つの種類に分類する方がよい場合も多い。余りによる分類は倍数証明によく用いられる。

例題 11

nを整数とするとき，次を示せ。

(1) n^2を3で割った余りは0か1である。

(2) n^2を4で割った余りは0か1である。

【解答】

(1) 任意の整数nはmを整数として，

$3m,\ 3m\pm1$

のいずれかの形で表せるから，

$n=3m$：$n^2=3\cdot3m^2$

$n=3m\pm1$：$n^2=3(3m^2\pm2m)+1$

（複号同順）

のいずれかとなり，n^2を3で割った余りは0か1である。 ■

(2) 任意の整数nはmを整数として，

$2m,\ 2m+1$

のいずれかの形で表せるから，

$n=2m$：$n^2=4\cdot m^2$

$n=2m+1$：$n^2=4(m^2+m)+1$

のいずれかとなり，n^2を4で割った余りは0か1である。 ■

【注】

1° 入試では常識なので記憶しておくのがよい。(1)は

「平方数を3で割ると2余ることはない」

と言い換えられ，これを問題にすると

> $x^2=3y+2$をみたす整数x，yは存在しないことを示せ。

となる。このような問題になると，両辺の余りが比較できるという意識が大切になる。(2)についても同様である。

2° (2)は4で割った余りで分類して

$4m,\ 4m\pm1,\ 4m+2$

としてもよいが，合成数（この問題なら4）の場合は2乗してその数が出てくる最小の数で考えると，分類が少なくなり議論がしやすくなる。逆に，小さい数での分類でうまくいかないときに，より大きな数での分類にして考えることもある。

3° この例題と同様にして，

「n^2を5で割った余りは0か1か4」

「n^2を7で割った余りは0か1か2か4」

であることも示せる。

1.2.6 倍数の判定法

自然数の倍数の判定法は次のようになる。

倍数の判定

2の倍数：1の位が偶数（0，2，4，6，8）

5の倍数：1の位が5の倍数（0，5）

3の倍数：各位の数の和が3の倍数

9の倍数：各位の数の和が9の倍数

4の倍数：下2桁が4の倍数

8の倍数：下3桁が8の倍数

他にもあるがこれらは結局，各位の数を定めてくくっていくだけで示せることである。実際，4桁の自然数Nの1000，100，10，1の位の数をa，b，c，dと定めると，

$N=1000a+100b+10c+d$

と表せるので，

$N=2(500a+50b+5c)+d$

$N=5(200a+20b+2c)+d$

$N=3(333a+33b+3c)+a+b+c+d$

$N=9(111a+11b+c)+a+b+c+d$

$N=4(250a+25b)+10c+d$

$N=8\cdot125a+100b+10c+d$

と変形できる。ここから上の事実が導けるのである。忘れたら，このように導くとよい。

例題 12

3 桁の整数 N を 10 進法で表すと，100 の位の数は 3，10 の位の数は a，1 の位の数は b である。このとき，N が 3 の倍数になるような $(a,\ b)$ の組はいくつあるか。

【解答】

条件により，

$$N=300+10a+b$$
$$=3(100+3a)+a+b$$

N が 3 の倍数となるのは，$a+b$ が 3 の倍数のときである。a，b は 0 から 9 までの数なので，

$A=\{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$

$B=\{1,\ 4,\ 7\}$

$C=\{2,\ 5,\ 8\}$

とすると，$a+b$ が 3 の倍数になるのは，

(i) A から 2 数

(ii) B，C から 1 つずつ

のいずれかの場合である。重複も許すので，求める組の数は

$4\cdot4+3\cdot3=$ **25**

【注】

1° 各位の数が定まっているので，それから N を表現するとよい。もちろん判定法から

「各位の和 $3+a+b$ が 3 の倍数」

つまり

「$a+b$ が 3 の倍数」

と最初から考えてもよい。

2° $a+b$ が 3 の倍数となるのは，a を 3 で割った余りと b を 3 で割った余りの和が 3 の倍数であればよい。0 から 9 で考えるのではなく，余りで分類して考えることで倍数の判定ができるのは記憶に値する。

1.2.7 連続する k 個の整数

倍数を証明する際に整数の分類を行うが，n の整式が連続整数の形をしているときは，場合分けをせず素早く示すことが可能となる。

連続する k 個の整数

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots\cdots,\ n+k-1$$

を k で割った余りを順に

$$r_1,\ r_2,\ \cdots\cdots,\ r_k$$

とすると，

$\{r_1,\ r_2,\ \cdots\cdots,\ r_k\}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1\}$

が成り立つ。特に，n，$n+1$，……，$n+k-1$ の中に k の倍数はただ一つ存在する。

この事実に関連する内容として，次の事実がある。

連続 k 整数の積

連続する k 個の整数

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots\cdots,\ n+k-1$$

の積 $n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k-1)$ は $k!$ の倍数である。

【証明】

$$n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k-1)$$
$$=k!\cdot{}_{n+k-1}\mathrm{C}_k$$
$$=k!\cdot(\text{整数})$$

より，ただちに従う。■

例題 13

整数 n に対して，$P(n)=n^3-n$ とする。

(1) $P(n)$ は 6 の倍数であることを示せ。

(2) n が奇数ならば，$P(n)$ は 24 の倍数であることを示せ。

(3) $P(n)$ が 48 の倍数となる偶数 n をすべて求めよ。

【解答】

(1) $P(n)=(n-1)n(n+1)$

であり，これは連続する 3 個の整数の積だから，$3!=6$ の倍数である。■

(2) $n=2m+1$ (m：整数)

として，

$$
\begin{aligned}
P(n)&=P(2m+1)\\
&=2m(2m+1)(2m+2)\\
&=4m(m+1)(2m+1)\\
&=4m(m+1)\{(m-1)+(m+2)\}\\
&=4\{(m-1)m(m+1)+m(m+1)(m+2)\}
\end{aligned}
$$

$(m-1)m(m+1)$, $m(m+1)(m+2)$ はともに連続する3個の整数の積だから，$3!=6$ の倍数である。したがって，$P(n)$ は $4\cdot6=24$ の倍数である。 ■

(3) $n=2m$ （m：整数)

とすると，

$$
\begin{aligned}
P(n)&=P(2m)\\
&=2m(2m-1)(2m+1)
\end{aligned}
$$

連続する3個の整数の積だから3の倍数なので，48の倍数になる条件は，

「$2m(2m-1)(2m+1)$ が16の倍数」

$\Longleftrightarrow$「$m(2m-1)(2m+1)$ が8の倍数」

$2m\pm1$ は奇数だから，求める条件は

「m が8の倍数」

となる。したがって，

n は $2\cdot8=16$ の倍数

となり，

$\boldsymbol{n=16k}$ **（$\boldsymbol{k}$：整数）**

【注】

1° 連続整数に注意して積を考えると速い。(2)では無理やり作り出す意識をもつ。気がつかなければ，3で割った余りと2で割った余りで分類することになる。

例題 14

3より大きい整数 p に対して，p と $p+2$ がともに素数のとき，$p+1$ が6の倍数であることを示せ。

【解答】

$$p(p+1)(p+2)$$

は連続する3個の整数の積だから，$3!=6$ の倍数である。

p, $p+2$ はともに3より大きい素数だから，3の倍数でも2の倍数でもない。

したがって，$p+1$ が6の倍数である。 ■

【注】

1° 連続整数に注意して積を考えると速い。気がつかなければ，3で割った余りと2で割った余りで分類することになる。

1.2.8 合同式

整数の分類において余りに注意して場合分けをした。そのとき商よりも余りに注目していたので，余りだけで議論できると楽である。そこで，余りだけ取り出して考えられる**合同式**というものがある。

合同式

整数 a と b の差が m の倍数であるとき，「a と b は m を法として合同である」といい，

$$a\equiv b \pmod m$$

と表す。

合同式と余りの間には，次の関係が成り立つ。

「a と b が m を法として合同である」

$\Longleftrightarrow$「a, b を m で割った余りが等しい」

合同式には次のような性質がある。

合同式の性質

m を法として，$a\equiv b$, $c\equiv d$ のとき

(i) $a+c\equiv b+d$

(ii) $a-c\equiv b-d$

(iii) $ac\equiv bd$

(iv) $a^k\equiv b^k$ （k：2以上の自然数)

が成り立つ。

これらの性質は，合同式が普通の等式のように辺々足したり，引いたり，かけたりすることができることを意味している。合同式の両辺で余りが等しいと読めば，(i), (ii), (iii)が成り立つのも頷ける。(iv)は(iii)の特別な場合である。また，(iii)は非常によく用い，「**積の余りは余りの積（の余り）**」ということを意味している。整数の分類とも対応するが，平方数 x^2 や指数を含む形 2^n などで，先に x や2を割った余りを求めて考えることが大切な

のである。

合同式で記載してはいるが，略記しただけなので，気になるところがあれば式で丁寧に議論すればよい。そうすると意味がよく分かり，意味がよく分かった後はそれを素早く導けるように形を頭に入れておくだけである。

合同式を用いると先の例題 11 を略記できる。

例題 11〔再掲〕

n を整数とするとき，次を示せ。

(1) n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

(2) n^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 である。

【解答 2】

(1) 3 を法として，mod 3 を省略すると，

$$n\equiv 0 \Longrightarrow n^2\equiv 0^2=0$$
$$n\equiv 1 \Longrightarrow n^2\equiv 1^2=1$$
$$n\equiv 2\equiv -1 \Longrightarrow n^2\equiv (-1)^2=1$$

よって，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。 ■

(2) 4 を法として，mod 4 を省略すると，

$$n\equiv 0 \Longrightarrow n^2\equiv 0^2=0$$
$$n\equiv 1 \Longrightarrow n^2\equiv 1^2=1$$
$$n\equiv 2 \Longrightarrow n^2\equiv 2^2\equiv 0$$
$$n\equiv 3\equiv -1 \Longrightarrow n^2\equiv (-1)^2=1$$

よって，n^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 である。 ■

【注】〔続き〕

4° 合同式を用いると，(2)を 4 で割った余りで分類しても大変さはない。このように合同式は「余り」だけを議論する際には大変役に立つ。一方で，合同式を使わない【解答】で 2 で割った余りで分類したときのように，「商」を議論したいときには役に立ちにくい。余りだけで議論してみてうまくいかないときは，あらためて整数を分類して商を見ながら考えていくことになる。

例題 15

m は 5 で割ると 2 余る整数で，n は 5 で割ると 4 余る整数とする。

(1) $2m+3n$ を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(2) mn を 5 で割ったときの余りを求めよ。

【解答】

mod 5 で考え，

$$m\equiv 2 \pmod 5,\qquad n\equiv 4 \pmod 5$$

以下 mod 5 を省略する。

(1) $2m+3n\equiv 2\cdot 2+3\cdot 4=16\equiv \mathbf{1}$

(2) $mn\equiv 2\cdot 4=8\equiv \mathbf{3}$

【注】

1° 合同式により余りだけ見ることができると非常に簡明である。もちろん

a，b を整数として，

$$m=5a+2,\ n=5b+4$$

と表せるので，

$$2m+3n=5(2a+3b+3)+1$$
$$mn=5(5ab+4a+2b+1)+3$$

として求めてもよい。

例題 16

正の整数 n に対して，8^n を 3 で割った余りを求めよ。

【解答】

3 を法として，$8\equiv -1$ だから，

$$8^n\equiv(-1)^n\equiv\begin{cases}\mathbf{1}\ (\boldsymbol{n}：\textbf{偶数})\\ \mathbf{2}\ (\boldsymbol{n}：\textbf{奇数})\end{cases}$$

【注】

1° **「積の余りは余りの積（の余り）」**である。まず 8 を 3 で割り，その余りをかけると考える。余りだけなら合同式が便利である。問題で「余り」と明言される場合もあれば，「1 の位（10 で割った余り）」のように本質的には余りだが，明言されない場合もある。

2° 合同式を用いないならば，二項定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k$$

を用いることになる。

【解答 2】

$$8^n=(9-1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k 9^k(-1)^{n-k}$$

となり，$k=1$，2，……，$n-1$，n のときは 9^k が 3 で割り切れるので，8^n を 3 で割った余りは，9 を因数にもたない項である $k=0$ のときの $(-1)^n$ を 3 で割った余りと一致する。

したがって，求める余りは，

$$\begin{cases} \mathbf{1}\ (\boldsymbol{n}：\textbf{偶数}) \\ \mathbf{2}\ (\boldsymbol{n}：\textbf{奇数}) \end{cases}$$

例題 17

次の合同式をみたす x をそれぞれの法において $x\equiv a\pmod m$ の形で表せ。ただし，a は m より小さい自然数とする。

(1) $3x\equiv 2\pmod 5$

(2) $4x\equiv 3\pmod 7$

【解答】

(1) $x=0$，1，2，3，4 を代入したときに，$3x$ を 5 で割って余りが 2 になるのは $x=4$ のみだから，

$$\boldsymbol{x\equiv 4\pmod 5}$$

(2) $x=0$，1，2，3，4，5，6 を代入したときに，$4x$ を 7 で割って余りが 3 になるのは $x=6$ のみだから，

$$\boldsymbol{x\equiv 6\pmod 7}$$

【注】

1° a は m より小さい自然数という条件があるので，それに従い(1)では 5 通り，(2)では 7 通りを代入するだけである。それぞれ余りの表を作ると，次のようになる。

x	0	1	2	3	4
$3x$	0	3	1	4	2

x	0	1	2	3	4	5	6
$4x$	0	4	1	5	2	6	3

2° 両辺に係数が 1 になるような（法の数と互いに素な）数をかけてもよい。(1)では 2 を施すことにより，

$$6x\equiv 4\pmod 5$$

$6\equiv 1\pmod 5$ より，

$$x\equiv 4\pmod 5$$

(2)でも 2 を施すことにより，

$$8x\equiv 6\pmod 7$$

$8\equiv 1\pmod 7$ より，

$$x\equiv 6\pmod 7$$

1.2.9 （2元）1 次不定方程式

a，b，c を整数とするとき，x，y についての方程式

$$ax+by=c$$

を 2 元 1 次不定方程式という。この 2 元 1 次不定方程式をみたす整数 x，y の組を**整数解**という。

一般に a，b が互いに素であるとき，

$$ax+by=1$$

をみたす整数 x，y が存在する。それを $(x,\ y)=(p,\ q)$ とすると，

$$ap+bq=1$$

であり，両辺を c 倍することで，

$$a(cp)+b(cq)=c$$

となるから，

$$ax+by=c$$

をみたす整数 x，y が存在する。この事実を用いて，

・合同式を利用して解く

・整数解を 1 つ見つけて $c=0$ に帰着して解く

・係数の小さい 1 つの文字について解く

などの方法で解くことになる。なお，整数解を 1 つ見つける際，係数が大きく探しにくい場合には，互除法を利用して見つけることになる。

例題 18

$5x-3y=1$ の整数解を求めよ。

【解答】

$$5x=3y+1 \qquad \cdots\cdots①$$

3 を法として，

$$2x\equiv 1$$

x に 0，1，2 を代入して成り立つものを探すと，2 でのみ成り立つから，

$$x \equiv 2$$

このとき

$$x=3k+2 \ (k：整数)$$

と表せて，①より，

$$3y=5(3k+2)-1$$

$$\therefore \quad y=5k+3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3k+2,\ 5k+3)}$$

【注】

1°　$ax+by=c$ の形の不定方程式である。1 次式で表されたこの式は,「余り」に関する式である。「$5x$ を 3 で割って余り 1 となる x と，そのときの商 y を求める」問題だから，x は合同式が用いられ，商 y は整数の分類から考える。余りのうち成り立つものを一つ見つけることで議論が進行する。

2°　合同式を用いずに解答するなら次のように，一つの解を見つけて因数分解する【解答 2】，係数の絶対値が小さい文字について解く【解答 3】がある。

【解答 2】

$$5x-3y=1 \qquad \cdots\cdots①$$

①をみたす整数解として，

$$(x,\ y)=(2,\ 3)$$

があるから，

$$5\cdot2-3\cdot3=1 \qquad \cdots\cdots②$$

①−②より，

$$5(x-2)-3(y-3)=0$$

$$5(x-2)=3(y-3)$$

3，5 は互いに素だから，k を整数として，

$$5(x-2)=3(y-3)=15k$$

と表せる。

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3k+2,\ 5k+3)}$$

【解答 3】

$$y=\frac{5x-1}{3}=\frac{6x-x-1}{3}$$

$$=2x-\frac{x+1}{3}$$

y は整数だから，整数 m を用いて

$$m=\frac{x+1}{3}$$

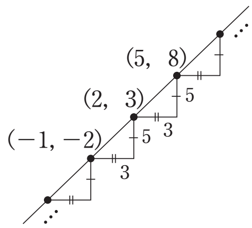
と表せて，このとき，

$$\begin{cases} y=2x-m \\ x=3m-1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3m-1,\ 5m-2)}$$

【注】

3°　直線上の格子点 (x, y 座標がともに整数の点) を求める問題でもある。一つの解 $(-1,\ -2)$ や $(2,\ 3)$ が見つかれば，直線の傾き $\dfrac{5}{3}$ ごとに格子点が現れる，とすぐに分かる。共通テストなどでは傾きから解答するのが簡明でよく，



$$\begin{cases} x=2+3k \\ y=3+5k \end{cases}$$

1 解　傾き

と書けばよい。

4°　【解答 2】,【解答 3】で答えの表記が異なるが,（k，m に代入すれば分かる通り）もちろん同じ解（集合）となる。実際，$k=m-1$ とおけばよい。全体としては一致する場合はどう答えても問題はない。

5°　【解答 3】で帯分数にする際は，分子の係数の絶対値が小さくなるように割り算する。

$$(5x-1=)\,3x+2x-1=6x-x-1$$

のうち係数の絶対値が小さくなる後者で考えた方が一つの文字について解く回数が少なくなるため考えやすい。

6°　係数が大きいときには一つの解を求めるのが容易ではないため，Euclid の互除法を用いるか，上のように係数の絶対値の小さい文字で解くと考えるとよい。

例題 19

$157x+68y=3$ の整数解を求めよ。

【解答】

$$157=68\cdot2+21 \quad \cdots\cdots①$$

$$68=21\cdot3+5 \quad \cdots\cdots②$$

$$21=5\cdot4+1 \quad \cdots\cdots③$$

これを逆に辿り，5，21 を消去すると，

$$\begin{aligned}1&=21-(68-21\cdot3)\cdot4\\&=21\cdot13-68\cdot4\\&=(157-68\cdot2)\cdot13-68\cdot4\\&=157\cdot13+68\cdot(-30)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 157\cdot39+68\cdot(-90)=3$$

これと与式で差をとり，

$$157(x-39)+68(y+90)=0$$

$$157(x-39)=-68(y+90)$$

①，②，③より，Euclid の互除法から 157，68 は互いに素だから，k を整数として，

$$157(x-39)=-68(y+90)=157\cdot68k$$

と表せる。

$$\therefore\quad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{68k+39},\ \boldsymbol{-157k-90})$$

【注】

1°　Euclid の互除法を用いて一つの解を見つけることになる。途中で出てきた余り 21，5 について，一文字消去の要領で式どうしを連立すると一つの解が見つけられる。今回のように，

$$157x+68y=1$$

の解が見つかれば

$$157x+68y=3$$

の右辺と対応させて 3 倍することで，一つの解を見つけられる。一連の流れが頭に入っているのが望ましいが，忘れてしまったら本質的に同じ操作である係数を割り算で小さくする方法をとればよい。

$$(68\cdot2+21)x+68y=3$$

$$68(2x+y)+21x=3$$

$$(21\cdot3+5)(2x+y)+21x=3$$

$$21(7x+3y)+5(2x+y)=3$$

$$(5\cdot4+1)(7x+3y)+5(2x+y)=3$$

$$5(30x+13y)+(7x+3y)=3$$

この方程式をみたす解として，

$$\begin{cases}30x+13y=0\\7x+3y=3\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}x=39\\y=-90\end{cases}$$

2°　係数の絶対値の小さい文字について解くと考えると，次のようになる。

【解答 2】

$$\begin{aligned}y&=\frac{-157x+3}{68}=\frac{-(68\cdot2+21)x+3}{68}\\&=-2x-\frac{3(7x-1)}{68}\end{aligned}$$

3，68 は互いに素で，y は整数だから，m を整数として，

$$m=\frac{7x-1}{68} \quad \cdots\cdots④$$

とおけて，

$$y=-2x-3m \quad \cdots\cdots⑤$$

④より，

$$\begin{aligned}x&=\frac{68m+1}{7}=\frac{70m-2m+1}{7}\\&=10m-\frac{2m-1}{7}\end{aligned}$$

x は整数だから，ℓ を整数として，

$$\ell=\frac{2m-1}{7} \quad \cdots\cdots⑥$$

とおけて，

$$x=10m-\ell \quad \cdots\cdots⑦$$

⑥より，

$$m=\frac{7\ell+1}{2}=3\ell+\frac{\ell+1}{2}$$

m は整数だから，n を整数として，

$$n=\frac{\ell+1}{2} \quad \cdots\cdots⑧$$

とおけて，

$$m=3\ell+n \quad \cdots\cdots⑨$$

このとき，⑧より，

$$\ell=2n-1$$

だから，⑨より，

$$m=3(2n-1)+n=7n-3$$

⑦より，

$$x=10(7n-3)-(2n-1)=68n-29$$

⑤より，

$$\begin{aligned}y&=-2(68n-29)-3(7n-3)\\&=-157n+67\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{68n-29},\ \boldsymbol{-157n+67})$$

1.2.10 p 進法

10 進法で 324.5 は，

$$324.5=3\cdot10^2+2\cdot10+4\cdot1+5\cdot10^{-1}$$

を意味している。これと同様に p 進法を考えることができる。p を 2 以上の自然数，k，ℓ を非負整数とするとき，任意の自然数 N は，0 以上 $p-1$ 以下の整数 a_i（$-\ell\leqq i\leqq k$）を用いて，

$$\begin{aligned}N=&a_kp^k+a_{k-1}p^{k-1}+\cdots\cdots+a_1p+a_0\\&+a_{-1}p^{-1}+\cdots\cdots+a_{-\ell}p^{-\ell}\end{aligned}$$

とただ一通りに表すことができ，

$$a_ka_{k-1}\cdots\cdots a_1a_0.a_{-1}\cdots\cdots a_{-\ell\,(p)}$$

と表す。ただし，$a_n\neq0$ である。この方法を **p 進法**といい，N の p 進法による表現を整数 N の p 進法表示とよぶ。10 進法で表すときは，$324_{(10)}$ の (10) を省略して単に 324 と書くことが多い。p 進法で表されたとき，a_i を p^i（$i=k$，$k-1$，……，$-\ell$）の位の数という。また，p 進法を総称して，位取り記数法という。

p 進法で表された数を 10 進法で表すといつも通りの計算に帰着できるので，p 進法で数が与えられたときは上の定義により，10 進法に直すことを考える。たとえば，

$$324_{(7)}=3\cdot7^2+2\cdot7+4\cdot1=165$$

となる。

上では p 進法で表されたものを 10 進法に直したが，逆に 10 進法のものを p 進法に直すこともある。たとえば，10 進法で 294 と表された数を 5 進法で表すとき，5 の累乗 1，5，5^2，5^3 で表すので，

$$\begin{aligned}294&=250+25+15+4\\&=2\cdot5^3+1\cdot5^2+3\cdot5+4\cdot1\\&=2134_{(5)}\end{aligned}$$

と表せる。一般に p 進法で表すときは，p の累乗で表現することを考えればよい。ただし，累乗で表すのが面倒な場合は，先の式が

$$\begin{aligned}294&=5(2\cdot5^2+1\cdot5+3)+4\\&=5\{5(\underline{\underline{2}}\cdot5+\underline{\underline{1}})+\underline{\underline{3}}\}+\underline{\underline{4}}\end{aligned}$$

と変形できることに注意して，294 を 5 で割った余りと，そのときの商を 5 で割った余りについて考えればよいと分かる。

したがって，

$$294=5\cdot58+\underline{\underline{4}}$$
$$58=5\cdot11+\underline{\underline{3}}$$
$$11=5\cdot\underline{\underline{2}}+\underline{\underline{1}}$$

と順次割り算し，最後の商から余りを逆に辿れば，$2134_{(5)}$ と楽に表せる。

$$\begin{array}{r|rcc}5 & 294 & & (\text{余り})\\\hline 5 & 58 & \cdots & \underline{\underline{4}}\uparrow\\\hline 5 & 11 & \cdots & \underline{\underline{3}}\\\hline & \underline{\underline{2}} & \cdots & \underline{\underline{1}}\end{array}$$

次に，10 進法の小数を p 進法表示に変換することを考える。$N=0.376$ を 5 進法で表すと，

$$N=a_1\cdot5^{-1}+a_2\cdot5^{-2}+a_3\cdot5^{-3}$$

と表せたとして，

$$5N=a_1+a_2\cdot5^{-1}+a_3\cdot5^{-2}$$
$$(5N-a_1)\cdot5=a_2+a_3\cdot5^{-1}$$
$$\{(5N-a_1)\cdot5-a_2\}\cdot5=a_3$$

が成り立つから，a_1，a_2，a_3 はそれぞれ，$5N$，$(5N-a_1)\cdot5$，$\{(5N-a_1)\cdot5-a_2\}\cdot5$ の整数部分として求められる。

$$0.376\cdot5=\underline{\underline{1}}.88$$
$$0.88\cdot5=\underline{\underline{4}}.4$$
$$0.4\cdot5=\underline{\underline{2}}$$

したがって，$N=0.142_{(5)}$ と表せる。小数部分に 5 をかける様子を筆算で書くと次のようになる。

$$\begin{array}{r|l}5\times & 0.376\\\hline 5\times & \underline{\underline{1}}.880\\\hline 5\times & \underline{\underline{4}}.40\\\hline & \underline{\underline{2}}.0\end{array}\downarrow$$

p 進法どうしの演算（加減乗除）は，すぐにできそうな場合を除けば，10 進法に直して計算し，必要に応じて p 進法に書き直せばよい。

例題 20

次の数を 10 進法で表せ。

(1) $453_{(7)}$

(2) $10212_{(3)}$

(3) $312.4_{(5)}$

【解答】

(1)　$453_{(7)}=4\cdot 7^2+5\cdot 7+3=\mathbf{234}$

(2)　$10212_{(3)}=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+2\cdot 3^2+1\cdot 3+2=\mathbf{104}$

(3)　$312.4_{(5)}=3\cdot 5^2+1\cdot 5+2\cdot 1+4\cdot 5^{-1}=\mathbf{82.8}$

【注】

1°　n 進法の定義通りに計算するだけである。

例題 21

次の 10 進法を［　］内の表し方で表せ。

(1)　342［2 進法］

(2)　652［7 進法］

(3)　0.624［5 進法］

【解答】

(1)

$$
\begin{array}{r|rcl}
2 & 342 & & (余り) \\ \hline
2 & 171 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
2 & 85 & \cdots & \underline{\underline{1}} \\ \hline
2 & 42 & \cdots & \underline{\underline{1}} \\ \hline
2 & 21 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
2 & 10 & \cdots & \underline{\underline{1}} \\ \hline
2 & 5 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
2 & 2 & \cdots & \underline{\underline{1}} \\ \hline
 & \underline{\underline{1}} & \cdots & \underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

$\therefore$　$342=\mathbf{101010110}_{(2)}$

(2)

$$
\begin{array}{r|rcl}
7 & 652 & & (余り) \\ \hline
7 & 93 & \cdots & \underline{\underline{1}} \\ \hline
7 & 13 & \cdots & \underline{\underline{2}} \\ \hline
 & \underline{\underline{1}} & \cdots & \underline{\underline{6}}
\end{array}
$$

$\therefore$　$652=\mathbf{1621}_{(7)}$

(3)

$$
\begin{array}{r|l}
5\times & 0.624 \\ \hline
5\times & \underline{\underline{3}}.120 \\ \hline
5\times & \underline{\underline{0}}.60 \\ \hline
 & \underline{\underline{3}}.0
\end{array}
$$

$\therefore$　$0.624=\mathbf{0.303}_{(5)}$

【注】

1°　n 進法の定義に注意する。解答のように略記して解くとよい。

例題 22

10! を 3 進法で表すことを考える。

(1)　末尾に 0 が連続して何個並ぶか。

(2)　末尾から順に見ていくとき，初めて現れる 0 でない数はいくつか。

【解答】

$$
\begin{aligned}
10! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 \\
&= 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7
\end{aligned}
$$

(1)　$10!=(3$ で割り切れない自然数$)\cdot 3^4$

だから，末尾に 0 が **4 個並ぶ**。

(2)　mod 3 で考える。

$2^8\equiv(-1)^8=1$

$5^2\equiv 2^2\equiv 1$

$7\equiv 1$

より，

$2^8\cdot 5^2\cdot 7\equiv 1\cdot 1\cdot 1=1$

だから，N を自然数として，

$10!=(3N+1)\cdot 3^4$

したがって，末尾から順に見ていくとき初めて現れる 0 でない数は **1**

【注】

1°　具体的な計算が面倒そうなので，計算するのではなく鍵となる部分に注意する。よく分からなければ 3 進法で表しにいくと考えればよく，

$$
\begin{array}{r|rcl}
3 & 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7 & & (余り) \\ \hline
3 & 2^8\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
3 & 2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
3 & 2^8\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
3 & 2^8\cdot 5^2\cdot 7 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \hline
 & \underline{\underline{N}} & \cdots & \underline{\underline{r}}
\end{array}
$$

となる。$2^8\cdot 5^2\cdot 7$ を 3 で割った余り r は 0 ではないので，(1)は 4 個並ぶのが分かり，(2)はこの r が求めるものだと分かる。そこで，この r を求めるべく，$2^8\cdot 5^2\cdot 7$ を 3 で割っていくことになる。積の余りなので，余りの積（の余り）と考えて，合同式を用いるとよい。

例題 23

6! を 3 進法で表すと何桁の数になるか。

【解答】

$$3^5=243<6!=720<3^6=729$$

だから，3 進法で **6 桁**である。

【注】

1°　桁数の問題。まず 10 進法で考えて，3 進法にすると考えればよい。自然数 N が 10 進法で 5 桁である条件は

$$10000 \leqq N < 100000$$

$$\therefore \quad 10^4 \leqq N < 10^5$$

だから，N が 3 進法で 5 桁である条件は

$$10000_{(3)} \leqq N < 100000_{(3)}$$

$$\therefore \quad 3^4 \leqq N < 3^5$$

となる。これと同様に考えればよい。

2°　真面目に 3 進法で表してもよい。

3)	720		(余り)
3)	240	…	0
3)	80	…	0
3)	26	…	2
3)	8	…	2
	2	…	2

より，

$$6!=222200_{(3)}$$

1.3 講義用問題

問題 1

整式 $A=6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$ を因数分解すると，

$$A=(\boxed{\text{ア}}x+y+\boxed{\text{イ}})(\boxed{\text{ウ}}x+y-\boxed{\text{エ}})$$

となる。

$x=-1$，$y=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ のとき，A の値は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

問題 2

方程式 $x^2-\sqrt{3}x-2=0$ の 2 解を a，b とすると，

$$(a-1)^2+(b-1)^2=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

問題 3

$\sqrt{21}$ の整数部分は $\boxed{\text{ア}}$ である。

$\sqrt{21}$，$\sqrt{23}$，$\sqrt{31}$ の小数部分をそれぞれ a，b，c とするとき

$$a-c=\boxed{\text{イ}}+\sqrt{21}-\sqrt{31}$$

であり

$$(\boxed{\text{イ}}+\sqrt{21}-\sqrt{31})(\boxed{\text{イ}}+\sqrt{21}+\sqrt{31})(9+2\sqrt{21})$$

$$=\boxed{\text{ウ}}$$

となる。

次の $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

$\boxed{\text{エ}}$ が成り立つ。

⓪ $a<b<c$　① $b<c<a$　② $c<a<b$

③ $a<c<b$　④ $c<b<a$　⑤ $b<a<c$

問題４

次の問いに答えよ。

(1) 次の問題に対する解答における式番号①，②，③の間の式変形について，その正誤を述べた文として正しいものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。 $\boxed{\text{ア}}$

問題 x を実数とするとき，

$$\sqrt{x^4+4x^3+2x^2-4x+1}$$

を簡単にせよ。

【問題の解答】

$$\sqrt{x^4+4x^3+2x^2-4x+1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$=\sqrt{(x^2+2x-1)^2} \quad \cdots\cdots ②$$

$$=x^2+2x-1 \quad \cdots\cdots ③$$

⓪ ①から②，②から③はともに正しい。

① ①から②は正しいが，②から③は誤りである。

② ①から②は誤りであるが，②から③は正しい。

③ ①から②，②から③はともに誤りである。

(2) $\sqrt{x^4+4x^3+2x^2-4x+1}<3$ をみたす整数 x は， $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

問題５

n を 3 以上の整数とする。紙に正方形のマスが縦横とも $(n-1)$ 個ずつ並んだマス目を書く。その $(n-1)^2$ 個のマスに，以下の**ルール**に従って数字を一つずつ書き込んだものを「方盤」と呼ぶことにする。なお，横の並びを「行」，縦の並びを「列」という。

ルール：上から k 行目，左から ℓ 列目のマスに，k と ℓ の積を n で割った余りを記入する。

$n=3$，$n=4$ のとき，方盤はそれぞれ下の図 1，図 2 のようになる。

1	2
2	1

図 1

1	2	3
2	0	2
3	2	1

図 2

例えば，図 2 において，上から 2 行目，左から 3 列目には，$2\times3=6$ を 4 で割った余りである 2 が書かれている。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=8$ のとき，下の図 3 の方盤の A に当てはまる数を答えよ。$\boxed{\text{ア}}$

		A				

図 3

また，図 3 の方盤の上から 5 行目に並ぶ数のうち，1 が書かれているのは左から何列目であるかを答えよ。左から $\boxed{\text{イ}}$ 列目

(2)　$n=7$ のとき，下の図 4 のように，方盤のいずれのマスにも 0 が現れない。

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

図 4

このように，方盤のいずれのマスにも 0 が現れないための，n に関する必要十分条件を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。 $\boxed{\text{ウ}}$

⓪　n が奇数であること。
①　n が 4 で割って 3 余る整数であること。
②　n が 2 の倍数でも 5 の倍数でもない整数であること。
③　n が素数であること。
④　n が素数ではないこと。
⑤　$n-1$ と n が互いに素であること。

(3)　n の値がもっと大きい場合を考えよう。方盤においてどの数字がどのマスにあるかは，整数の性質を用いると簡単に求めることができる。

$n=56$ のとき，方盤の上から 27 行目に並ぶ数のうち，1 は左から何列目にあるかを考えよう。

(i)　方盤の上から27 行目，左から ℓ 列目の数が 1 であるとする（ただし，$1\leqq\ell\leqq55$）。ℓ を求めるためにはどのようにすれば良いか。正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 $\boxed{\text{エ}}$

⓪　1 次不定方程式 $27\ell-56m=1$ の整数解のうち，$1\leqq\ell\leqq55$ を満たすものを求める。
①　1 次不定方程式 $27\ell-56m=-1$ の整数解のうち，$1\leqq\ell\leqq55$ を満たすものを求める。
②　1 次不定方程式 $56\ell-27m=1$ の整数解のうち，$1\leqq\ell\leqq55$ を満たすものを求める。
③　1 次不定方程式 $56\ell-27m=-1$ の整数解のうち，$1\leqq\ell\leqq55$ を満たすものを求める。

(ii)　(i)で選んだ方法により，方盤の上から 27 行目に並ぶ数のうち，1 は左から何列目にあるかを求めよ。左から $\boxed{\text{オカ}}$ 列目

(4)　$n=56$ のとき，方盤の各行にそれぞれ何個の 0 があるか考えよう。

(i)　方盤の上から 24 行目には 0 が何個あるか考える。

左から ℓ 列目が 0 であるための必要十分条件は，24ℓ が 56 の倍数であること，すなわち，ℓ が $\boxed{\text{キ}}$ の倍数であることである。したがって，上から 24 行目には 0 が $\boxed{\text{ク}}$ 個ある。

(ii)　上から 1 行目から 55 行目までのうち，0 の個数が最も多いのは上から何行目であるか答えよ。上から $\boxed{\text{ケコ}}$ 行目

(5)　$n=56$ のときの方盤について，**誤っているもの**を，次の⓪～⑤のうちから二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$

⓪　上から 5 行目には 0 がある。
①　上から 6 行目には 0 がある。
②　上から 9 行目には 1 がある。
③　上から 10 行目には 1 がある。
④　上から 15 行目には 7 がある。
⑤　上から 21 行目には 7 がある。

問題６

(1)　百の位の数が3，十の位の数が7，一の位の数がaである3桁(けた)の自然数を$37a$と表記する。

$37a$が4で割り切れるのは

$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$

のときである。ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$の解答の順序は問わない。

(2)　千の位の数が7，百の位の数がb，十の位の数が5，一の位の数がcである4桁の自然数を$7b5c$と表記する。

$7b5c$が4でも9でも割り切れるb，cの組は，全部で$\boxed{\text{ウ}}$個ある。これらのうち，$7b5c$の値が最小になるのは$b=$ $\boxed{\text{エ}}$，$c=$ $\boxed{\text{オ}}$のときで，$7b5c$の値が最大になるのは$b=$ $\boxed{\text{カ}}$，$c=$ $\boxed{\text{キ}}$のときである。

また，$7b5c=(6\times n)^2$となるb，cと自然数nは

$b=$ $\boxed{\text{ク}}$，$c=$ $\boxed{\text{ケ}}$，$n=$ $\boxed{\text{コサ}}$

である。

(3)　1188の正の約数は全部で$\boxed{\text{シス}}$個ある。

これらのうち，2の倍数は$\boxed{\text{セソ}}$個，4の倍数は$\boxed{\text{タ}}$個ある。

1188のすべての正の約数の積を2進法で表すと，末尾には0が連続して$\boxed{\text{チツ}}$個並ぶ。