第 1 講

数　と　式
集合と論理

講義 1　（講義映像①）

講義問題 1　　**理解度□□□**

$\boxed{1}$　$6x^2-4y^2-2xy+x+4y-1$ を因数分解せよ。

$\boxed{2}$　$(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3$，$(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4$ をそれぞれ計算せよ。

〈対称式の計算〉

x，y の対称式 → 基本対称式 $x+y$，xy で表せる

〈よく用いる式〉

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

講義問題 1 **理解度□□□**

3 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b の値を求めよ。

〈2 重根号の外し方〉

$$\sqrt{\underline{a+b}+2\sqrt{\underline{ab}}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

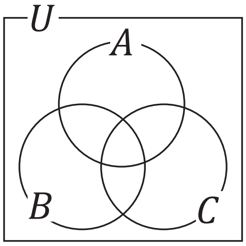
和　積　（ただし，$a>0$，$b>0$ とする）

講義問題 2 **理解度□□□**

$\boxed{1}$ 500 人を対象にした市場調査によれば，商品 A，B，C を買った人はそれぞれ 224 人，237 人，266 人であり，3 種類とも買った人は 20 人，どの商品も買わなかった人は 9 人であった。このとき，2 種類以上の商品を買った人は何人か。

〈和集合の要素の個数 ～集合が3つの場合～〉

$$
\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C)\\
&= n(A) + n(B) + n(C)\\
&\quad -n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)\\
&\quad +n(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$



〈必要条件と十分条件〉

$p \quad \Longrightarrow \quad q$ が「真」

$\boxed{十}$分条件　　必$\boxed{要}$条件

講義問題 2

理解度□□□

2 a, b を実数とするとき, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを下の選択肢から選び, 記号で答えよ。

(1) a, b がともに無理数であることは, $a+b$, ab がともに無理数であるための $\boxed{\text{ア}}$。

(2) $a^2+b^2<4$ であることは, $|a|+|b|<2$ であるための $\boxed{\text{イ}}$。

〔選択肢〕 A 必要十分条件である

B 必要条件であるが十分条件ではない

C 十分条件であるが必要条件ではない

D 必要条件でも十分条件でもない

講義問題 3 理解度□□□

1 条件 A：「x が実数で $x<a$」（ただし，a は実数の定数とする。）

条件 B：「x が実数で $x<3$」

条件 C：「x が実数で $x>5$」

について，次のようになる a の値の範囲を求めよ。

(1) A が B であるための十分条件となる。

(2) A と C をともにみたす整数が 3 個となる。

講義問題 3

理解度□□□

2　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを示せ。

ただし，$\sqrt{2}$ は無理数であることを用いてよい。

〈背理法〉

- 証明法の一つで，直接証明が困難なときに用いる。
- 命題 A が成り立つことを示す際に，
  命題 A が成り立たないことを仮定して，その矛盾を導く。
- 無理数の証明に有効である。

第 1 講　（復習問題）

復習問題 1　　定着度□□□

[1]　$6x^2+xy-2y^2+10x+9y-4$ を因数分解せよ。

[2]　$$a+b+c=0,\ ab+bc+ca=-12,\ abc=16$$

がすべて成り立つとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$a^2+b^2+c^2$　　(2)　$a^3+b^3+c^3$

(3)　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

復習問題 2　　定着度□□□

ある団地の 350 世帯のうち，A 新聞を購読しているのは 132 世帯，B 新聞を購読しているのは 105 世帯，C 新聞を購読しているのは 88 世帯である。また，3 紙とも購読しているのは 5 世帯，どれも購読していないのは 75 世帯である。このとき，次の世帯数を求めよ。

(1)　少なくとも 1 紙購読している世帯

(2)　1 紙のみ購読している世帯

復習問題 3　定着度□□□

次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを下の選択肢から選び，記号で答えよ。

(1)　$-2<x<0$ は，$x \geqq -2$ であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。

(2)　x，y を実数とする。$|x| \leqq 2$ かつ $|y| \leqq 2$ であることは，$x^2+y^2 \leqq 4$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。

(3)　m，n を整数とする。m，n が 3 の倍数であることは，m^2-n^2 が 3 の倍数であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

〔選択肢〕　A　必要十分条件である

B　必要条件であるが十分条件ではない

C　十分条件であるが必要条件ではない

D　必要条件でも十分条件でもない

復習問題 4　定着度□□□

整数 x，y，z が $x^2+y^2=z^2$ をみたすとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは偶数であることを証明せよ。

〈復習問題の解答〉

復習問題 1

$\boxed{1}$ $6x^2+xy-2y^2+10x+9y-4$

$=6x^2+(y+10)x-(2y^2-9y+4)$

$=6x^2+(y+10)x-(2y-1)(y-4)$

$=\{3x+(2y-1)\}\{2x-(y-4)\}$

$=(3x+2y-1)(2x-y+4)$ ……$\boxed{答}$

$$\begin{array}{lll} 3 & (2y-1) \longrightarrow & 2(2y-1) \\ 2 & -(y-4) \longrightarrow & -3(y-4) \\ \hline 6 & -(2y-1)(y-4) & \boxed{y+10} \end{array}$$

$\boxed{2}$ $a+b+c=0$ ……①

$ab+bc+ca=-12$ ……②

$abc=16$ ……③

(1) ①の両辺を 2 乗すると

$(a+b+c)^2=0$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

②を代入して

$a^2+b^2+c^2+2\cdot(-12)=0$

よって　$a^2+b^2+c^2=24$ ……$\boxed{答}$

(2) ①の両辺を 3 乗すると

$(a+b+c)^3=0$

$\{(a+b)+c\}^3=0$

$(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=0$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc$
$+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3=0$

$a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3ac(a+c)$
$+3bc(b+c)+6abc=0$

ここで，①より

$a+b=-c$，$b+c=-a$，$a+c=-b$

だから，これらを代入して

$a^3+b^3+c^3-3abc-3abc-3abc+6abc=0$

$a^3+b^3+c^3=3abc$

よって，③より

$a^3+b^3+c^3=3\cdot16=48$ ……$\boxed{答}$

(3) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$ ……④

ここで，②の両辺を 2 乗すると

$(ab+bc+ca)^2=(-12)^2$

$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2ab^2c+2bc^2a$
$+2ca^2b=144$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(b+c+a)=144$

①より　$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=144$ ……⑤

だから，④に③と⑤を代入すると

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{144}{16^2}=\dfrac{9}{16}$ ……$\boxed{答}$

復習問題 2

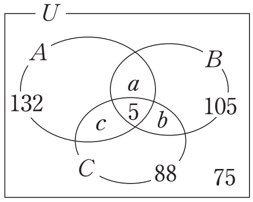
この団地の全世帯を要素とする集合を全体集合 U とし，A 新聞，B 新聞，C 新聞を購読している世帯の集合をそれぞれ A，B，C とすると

$n(U)=350$

$n(A)=132$，$n(B)=105$，$n(C)=88$

$n(A\cap B\cap C)=5$

$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=75$



(1) 少なくても 1 紙購読しているのは

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(\overline{A\cup B\cup C})$

$=350-75$

$=275$（世帯） ……$\boxed{答}$

(2) 図のように

$n(A\cap B)=a+5$，$n(B\cap C)=b+5$，

$n(C\cap A)=c+5$

とすると，1 紙のみ購読している世帯数は

$n(A\cup B\cup C)-(a+b+c+5)$

である。

$n(A)+n(B)+n(C)=132+105+88$

$=325$

は a，b，c を二度ずつ，5 を三度数えているから，(1)より

$325-(a+b+c)-5\cdot2=275$

$a+b+c=40$

よって，1 紙のみ購読しているのは

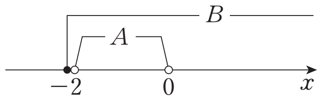
$275-(40+5)=230$（世帯） ……$\boxed{答}$

復習問題 3

(1) $-2<x<0$ をみたす実数 x の集合を A と

し，$x \geqq -2$ をみたす実数 x の集合を B とすると，次の数直線の図のように

$A \subset B$ であるが，$B \subset A$ ではない



つまり　$-2<x<0 \Longrightarrow x \geqq -2$

は真であるが，逆は真でない。

（反例：$x=1$ など）

よって，$-2<x<0$ は $x \geqq -2$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

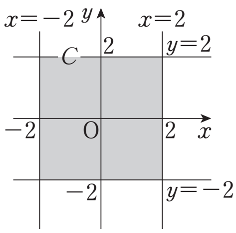
答　C

(2)　$|x| \leqq 2$ かつ $|y| \leqq 2$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を C とすると，C は直線

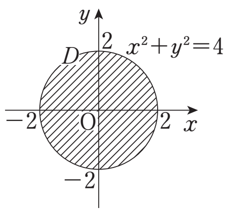
$x=2$，$x=-2$，

$y=2$，$y=-2$

で囲まれる正方形の周と内部である。



$x^2+y^2 \leqq 4$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を D とすると，D は原点を中心とする半径 2 の円の周と内部である。



$D \subset C$ であるが，

$C \subset D$ ではない

つまり

$x^2+y^2 \leqq 4 \Longrightarrow |x| \leqq 2$ かつ $|y| \leqq 2$

は真であるが，逆は真でない。

（反例：$(x,\ y)=(2,\ 2)$ など）

よって，$|x| \leqq 2$ かつ $|y| \leqq 2$ であることは，$x^2+y^2 \leqq 4$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

答　B

(3)　m，n が 3 の倍数であるとき

$m=3k$，$n=3\ell$　（k，ℓ は整数）

と表せる。このとき

$$m^2-n^2=(3k)^2-(3\ell)^2$$
$$=9k^2-9\ell^2$$
$$=3(3k^2-3\ell^2)$$

となり，m^2-n^2 は 3 の倍数である。

しかし，たとえば $m=2$，$n=1$ とすると

$$m^2-n^2=2^2-1^2=3$$

は 3 の倍数であるが，m，n は 3 の倍数ではない。

つまり　m，n が 3 の倍数

$\Longrightarrow m^2-n^2$ は 3 の倍数

は真であるが，逆は真でない。

（反例：$m=2$，$n=1$ など）

よって，m，n が 3 の倍数であることは，m^2-n^2 が 3 の倍数であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

答　C

復習問題 4

背理法を用いて証明する。

$$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots\cdots ①$$

をみたす整数 x，y，z がいずれも奇数であると仮定する。

このとき，k，ℓ，m を整数として

$x=2k-1$，$y=2\ell-1$，$z=2m-1$

と表せるから，これらを①に代入して

$$(2k-1)^2+(2\ell-1)^2=(2m-1)^2$$
$$4k^2-4k+1+4\ell^2-4\ell+1=4m^2-4m+1$$
$$2(2k^2-2k+2\ell^2-2\ell+1)=2(2m^2-2m)+1$$

この等式の左辺は偶数，右辺は奇数となり矛盾する。

したがって，x，y，z のいずれも奇数であるとした仮定は誤りであり，①をみたす整数 x，y，z のうち少なくとも 1 つは偶数である。

（証明終わり）