第 2 講

波の表現法

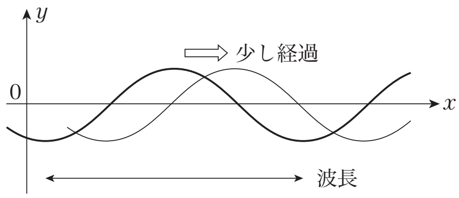
＜重要ポイント＞

◆正弦進行波のグラフ

・***y*-*x* グラフ**

ある時刻における変位の空間分布(波の形)。

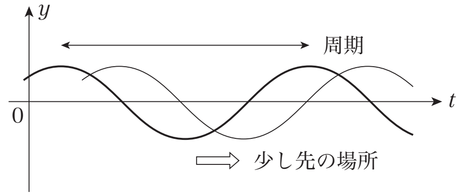
進行方向へずらすと，後の時刻の波形になる。



・***y*-*t* グラフ**

ある場所での媒質変位の時間振動(単振動)。

右へずらすと，波の進む側の点の時間振動。



◆正弦進行波の式

・x 軸の正の向きへ伝わる波　　$y_+(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)+\phi_+\right\}$

・x 軸の負の向きへ伝わる波　　$y_-(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}\right)+\phi_-\right\}$

(A：振幅　T：周期　λ：波長　ϕ_+，ϕ_-：初期位相)

◇波の速さ

$$V=\frac{\lambda}{T}=f\lambda\quad(f=T^{-1}\text{：振動数})$$

◆重ね合わせの原理

２つの波 y_1 と y_2 による合成波の変位 Y は

$$Y(x,\ t)=y_1(x,\ t)+y_2(x,\ t)$$

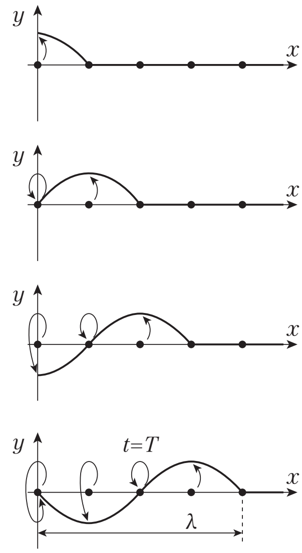
◆定常波

同じ周期，波長，振幅で互いに逆向きに進む波を重ねると，全体としてどちら側にも進まない**定常波**ができる。

(数式表現)　$Y(x,\ t)=$(定数)×(x だけの項)×(t だけの項)

講義概要

◆正弦進行波の表現



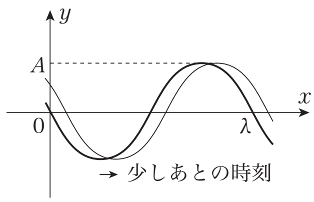
空間内のある1点における何がしかの時間的な振動が，少しずつ遅れて周囲へ広がってゆく現象を**波動**(wave)という。この講座ではしばらくの間は空気や水などの媒質の力学現象としての振動が伝わる**力学的な波動**を，のちに媒質を必要とせずに電場・磁場の振動が伝わる**電磁波(光)**を扱う。

波動は時間的・空間的な繰り返し現象であり，周期性を有する。ところであらゆる周期関数は三角関数(正弦・余弦)の重ね合わせで記述できるという性質がある。そこで当面，われわれは繰り返しのパターンが正弦関数で表される**正弦波**(sinusoidal wave)を主に扱うこととする。

1次元(x軸上)の1点を直交するy軸に沿って単振動させると，図のように1周期Tだけ経過した後にはx軸に沿って空間的な繰り返しのパターンが現れる。この長さを**波長**(wavelength)と呼びλで表す。時間Tの間に波形(wave form)はλだけ平行移動しているので，波の速さ(wave speed)Vは次のようにできる。

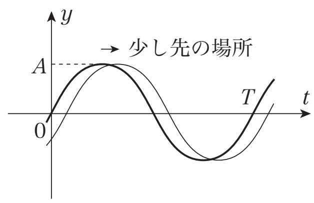
$$\boxed{V=\frac{\lambda}{T}=f\lambda}\quad (f=T^{-1}\ \text{は振動数})$$

◇y-xグラフ



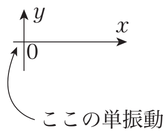
x軸上を伝わる波の波形を，ある瞬間において図示したもので，これからは波の振幅Aと波長λがわかっても，時間的なふるまいを調べることはできない。この場合，別の時刻のグラフと比較して各点の時間的振動等を考察することが可能となる。右図はx軸の正方向に伝わる波のy-xグラフを，ある時刻とその少し後とで比べたものである。

◇y-tグラフ

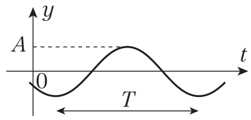


x軸上のある点における媒質のy軸に沿った時間的な単振動の様子を図示している。これからは振幅Aと周期Tがわかっても，場所ごとの時間振動の違いを調べることはできない。この場合，別の地点のグラフと比較して考察することが可能となる。右図はx軸の正方向に伝わる波のy-tグラフを，ある地点とそれより少しxの正側の点とで比べたものである。

◆正弦進行波の式



x 軸に沿って伝わる 1 次元正弦進行波を数式表現してみる。この場合，波がない場合と比べた変位は，位置 x と時刻 t の関数として $y(x,\ t)$ とできるので，これを特定する。



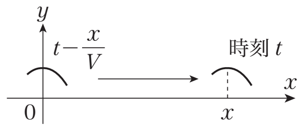
原点 $x=0$ が振幅 A，角振動数 $\omega\left(\text{周期 } T=\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$ の単振動をするとして，ここでの単振動を一般式

$$f(t)=y(0,\ t)=A\sin(\omega t+\phi)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right) \qquad \cdots(\mathrm{i})$$

で表す。

◇ x 軸正方向へ伝わる波

$x>0$ の地点を考えると，ここでは原点 $x=0$ での変位が時間 $\dfrac{x}{V}$ だけ遅れてやってくるので



$$y_+(x,\ t)=f\left(t-\frac{x}{V}\right)$$

である。(i)式を用いて

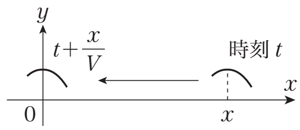
$$y_+(x,\ t)=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{V}\right)+\phi\right\}$$

さらに $VT=\lambda$ として整理すると，次式を得る。

$$\boxed{\boldsymbol{y_+(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi\right\}}} \qquad \cdots(\mathrm{A})$$

◇ x 軸負方向へ伝わる波

$x>0$ の地点を考えると，ここでは原点で生じる変位が，原点よりも時間 $\dfrac{x}{V}$ だけ早く実現されるから



$$y_-(x,\ t)=f\left(t+\frac{x}{V}\right)$$

である。(i)式を用いて

$$y_-(x,\ t)=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{V}\right)+\phi\right\}$$

さらに $VT=\lambda$ として整理すると，次式を得る。

$$\boxed{\boldsymbol{y_-(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\phi\right\}}} \qquad \cdots(\mathrm{B})$$

(A)，(B)両式とも，三角関数項の内部

$$\theta=2\pi\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda}\right)+\phi$$

を，単振動の場合と同様に**位相**(**phase**)という。

(A)式によると，x 軸の正方向に伝わる波は，x が大きい地点ほど振動の位相が遅れている。なお，初期位相 ϕ は初期条件で定まるものであり，例えば $\phi'=\phi+\pi$ などとして

$$y_{+}(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+(\phi'-\pi)\right\}$$

$$=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)-\phi'\right\}$$

とすることもできるから，変数 t と x はその順序には関係なく，係数が逆符号の場合に x 軸の正方向に進む波を表すといえる。

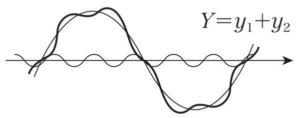
(B)式によると，x 軸の負方向に伝わる波は，x が大きい地点ほど振動の位相が進んでいる。以上のように，**各点が異なる位相の振動をする**ことが波が伝わって見える要因といえる。また，(A)式と同様に t と x は順序ではなく係数が同符号の場合に x 軸の負方向に進む波を表すことになる。

◆重ね合わせの原理

２つ(以上)の波が同時に存在すると，我々にはそれらの合成変位 $Y(x,\ t)$ が重ね合わせ(superposition)として次のように観測される。

$$Y(x,\ t)=y_1(x,\ t)+y_2(x,\ t)+\cdots$$

これを**重ね合わせの原理**という。



◆定常波

同じ周期，波長，振幅で互いに逆向きに進む波を重ね合わせると，合成波は全体としてどちらの向きにも進まないように見える。このような波は**定常波**，**定在波**(**standing wave**)と呼ばれる。

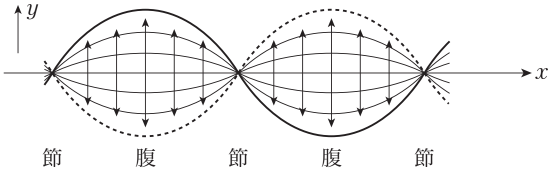
x 軸に沿って正の向きと負の向きに進む波の一般式を用いると

$$Y(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_{+}\right\}+A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_{-}\right\}$$

ここに，三角関数公式 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を使えば

$$Y(x,\ t)=2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{\phi_{-}-\phi_{+}}{2}\right)\cdot\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\phi_{+}+\phi_{-}}{2}\right)$$

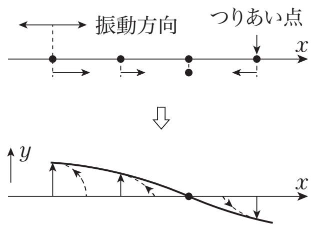
のように，x のみを含む項と t のみを含む項に分けることができる。これは，時間的に各点が同位相振動を行い，図のように場所ごとにその振幅が異なることを意味する。



振動が最も激しい場所を**腹**(loop)，全く振動しない場所を**節**(node)という。腹同士，節同士の間隔は波長の $\frac{1}{2}$，隣り合う腹と節の間隔は波長の $\frac{1}{4}$ となる。

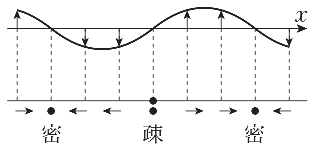
◆縦波と横波

各点の振動方向が波の伝わる方向に直交する波を**横波**(transverse wave)という。ピンと張った糸を伝わる理想的な波がその例である。また，媒質ではなく電磁場の振動だが，電磁波(光)も横波である。



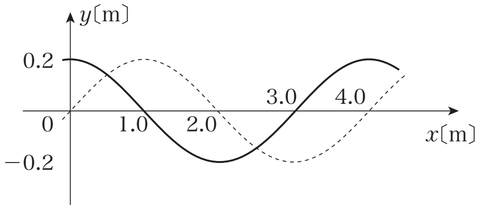
これに対し，各点の振動方向が波の伝わる方向に平行な波を**縦波**(longitudinal wave)という。空気や水を伝わる弾性波(音波など)がその例である。縦波の場合，現実の変位をそのまま図示するとわかりにくいので，媒質の平衡点から波の進む向きへの変位を正として，90° 回転させて図のように変位を表す。このようにすると，波のグラフ・数式表現とも横波と同様に処理できる。

縦波は，波がないときに比べて媒質の密度が変化し，これが伝わってゆくので**疎密波**(compression wave)とも呼ばれる。疎密の判別は，図のように現実の変位を考慮することで可能となる。



例題 2－1（正弦波，y-x グラフ）

x 軸の正の向きに進む正弦進行波を観察したところ，波形が図の実線からはじめて破線のようになるまで 2.0×10^{-2} s を要したという。この波の振幅 A，波長 λ，速さ V，周期 T，振動数 f を求めよ。



【解答】

グラフより，振幅　$A=0.2$ m，波長　$\lambda=4.0$ m

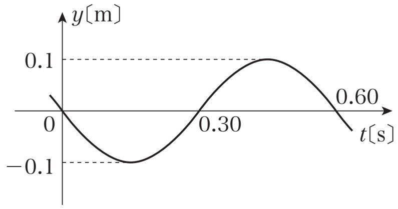
この 2.0×10^{-2} s の間に，原点にあった山が $x=1.0$ m まで移動したことになるから

$$速さ\quad V=\frac{1.0\ \mathrm{m}}{2.0\times10^{-2}\ \mathrm{s}}=50\ \mathrm{m/s}$$

$$周期\quad T=\frac{\lambda}{V}=\frac{4.0\ \mathrm{m}}{50\ \mathrm{m/s}}=8.0\times10^{-2}\ \mathrm{s}\qquad 振動数\quad f=\frac{1}{T}=12.5\ \mathrm{Hz}\fallingdotseq 13\ \mathrm{Hz}$$

例題 2−2（正弦波，y-t グラフ）

x 軸の正の向きに速さ $V=4.0\ \mathrm{m/s}$ で進む正弦進行波がある。この波の変位を $x=0$ で観察したところ，グラフのような時間変化が得られた。以下の問いに答えよ。



⑴　この波の周期 T と波長 λ はいくらか。

⑵　$x=1.8\ \mathrm{m}$ における変位の時間変化の様子を上図にならってグラフで示せ。

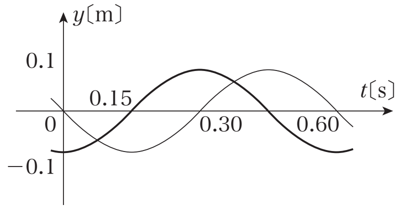
【解答】

⑴　周期　$T=0.60\ \mathrm{s}$　　波長　$\lambda=VT=2.4\ \mathrm{m}$

⑵　$x=1.8\ \mathrm{m}$ では，原点に比べて時間的に

$$t=\frac{1.8\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m/s}}=0.45\ \mathrm{s}\quad\left(=\frac{3}{4}T\right)$$

だけ遅れた振動を行うので，原点での y-t グラフを $\dfrac{3}{4}$ 周期分だけ右へ平行移動させればよい。



例題 2－3（正弦進行波の式，縦波の疎密）

x 軸の正の向きに進む波長 λ の正弦進行波 $y(x,\ t)$ がある。この波の原点 $x=0$ における変位の時間変化の様子が，$y(0,\ t)=A\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$ で表されたという。ここに A は振幅，T は周期である。以下の問いに答えよ。

⑴　任意の位置 x での時刻 t における変位 $y(x,\ t)$ の式を，x，t を変数とする式で表せ。

⑵　時刻 $t=\dfrac{T}{2}$ における変位を表す式を示し，原点の近くでの波形をグラフに表せ。

⑶　この波が縦波であるとき，$t=\dfrac{T}{2}$ において媒質密度が最大（最も密）である点と，最小（最も疎）である点を，$0\leqq x\leqq\lambda$ の範囲で求めよ。

【解答】

⑴　波の伝わる速さを $V\left(=\dfrac{\lambda}{T}\right)$ とすると，位置 x では原点での振動が $\dfrac{x}{V}$ だけ遅れて伝わるから

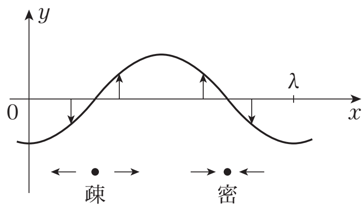
$$y(x,\ t)=y\left(0,\ t-\frac{x}{V}\right)=A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{V}\right)\right\}=A\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{VT}\right)\right\}$$

$$\therefore\quad y(x,\ t)=A\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right\}$$

⑵　$y\left(x,\ \dfrac{T}{2}\right)=A\cos\left(2\pi\cdot\dfrac{1}{2}-2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)=-A\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)$

⑶　最も密：$x=\dfrac{3}{4}\lambda$

最も疎：$x=\dfrac{1}{4}\lambda$



例題 2−4（波の式の合成，定常波）

x 軸の正の向きに進む進行波 y_+ と，負の向きに進む進行波 y_- の，位置 x，時刻 t における変位がそれぞれ

$$y_+=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right\},\quad y_-=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right\}$$

で表されている。A は振幅，T は周期，λ は波長である。以下の問いに答えよ。

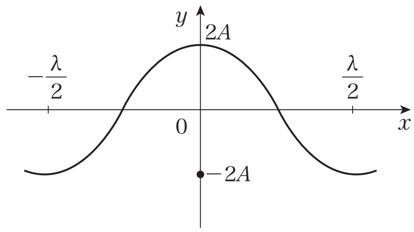
⑴ 観測される合成波の式を（x だけを含んだ項）×（t だけを含んだ項）の形に表し，時刻 $t=\dfrac{T}{4}$ における原点 $x=0$ 付近の合成波の波形をグラフで表せ。

⑵ この合成波は定常波と呼ばれる波になる。定常波の腹になる位置 x を，整数 m を用いて表せ。

【解答】

⑴ $y=y_++y_-=A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)\right\}+A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}\right)\right\}=2A\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\cdot\sin\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$

$t=\dfrac{T}{4}$ では　$y=2A\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)$　（右図）



⑵ 腹になる条件

$\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)=\pm1$　より　$2\pi\dfrac{x}{\lambda}=m\pi$

$\therefore$　$x=\dfrac{m}{2}\lambda$　$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

問題 2－1

図 1 の実線は，x 軸の正方向に進むある縦波の時刻 0 における x 軸上の各点の変位を y 軸にとって表したものである。ただし，x 軸の正方向の変位を y 軸の正方向と一致させてある。この波が進行して，はじめて点線のような波形になった時刻は 0.015 秒であった。

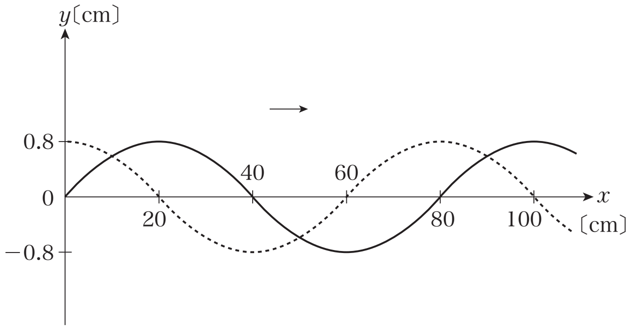


図 1

⑴　この波の，(ア)振幅 a，(イ)波長 λ，(ウ)伝わる速さ，(エ)振動数，(オ)周期 T はいくらか。

⑵　変位 y が図 2 のように時間変化するのはどの点か。0〜100 cm の範囲で示せ。

⑶　媒質の振動の速度 V が図 2 のように時間変化するのはどの点か。0〜100 cm の範囲で示せ。ただし，x 軸の正方向の速度を V の正方向にとるものとする。

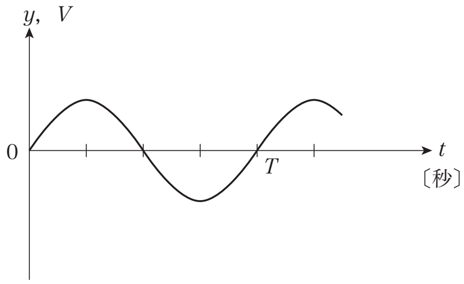


図 2

⑷　図 1 において，$t=0$ のとき媒質の密度が最大となっている点はどこか。0〜100 cm の範囲ですべてあげよ。また，変位 y が図 2 で表される点で，媒質の密度が最大になる時刻はいつか。0〜T の時間内ですべてあげよ。

問題 2－2

図 1 の実線は時刻 $t=0$ でのある正弦波の変位 y_1 を表している。時刻 $t=0.1$ s での波は破線のようになった。これを右向き(x 軸に沿って正の向き)に進む進行波という。以下の問いに答えよ。

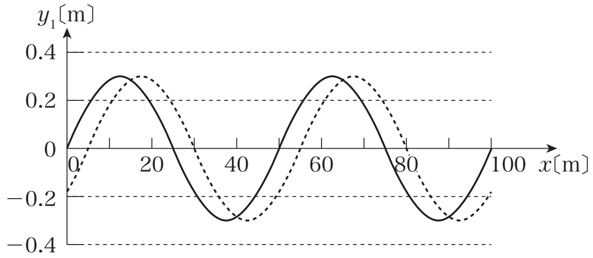


図 1

(1)　波の振幅 A はいくらか。

(2)　波の波長 λ はいくらか。

(3)　波の速さ v はいくらか。

(4)　波の振動数 f はいくらか。

(5)　波の周期 T はいくらか。

(6)　この波 y_1 を，位置 x と時刻 t および上の記号を用いた式で表せ。

(7)　y_1 と同じ振幅，波長，波の速さをもち，$t=0$ での波形が図 1 の実線と同じ左向きに進む進行波を y_2 とし，y_2 を今まで使った記号を用いて表せ。

(8)　2 つの波 y_1 と y_2 の合成波は定常波となった。定常波の振幅はいくらか。また，変位が最大となったとき(図 2(イ))とその次に変位がゼロとなるとき(図 2(ロ))との時間間隔はいくらか。

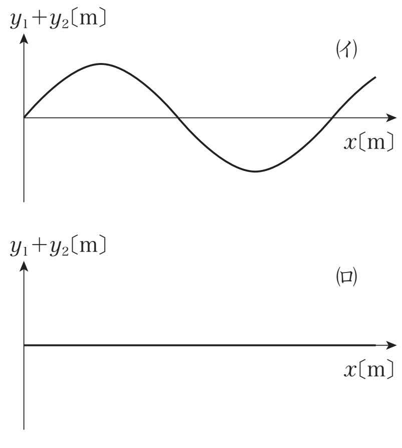


図 2

練習問題２

問１　図１に示されている波を考える。この図はある媒質の時刻 $t=0$ s での変位を表したものである。

x 軸上にある媒質は y 軸方向に振動することができるようになっており，波は x 軸の正の向きに進んでいる。波は振幅が 12 cm の正弦曲線であり，波の振動数は 5 Hz とする。以下の問に答えなさい。解答では $\boxed{}$ の中に適切な数値を記入しなさい。ただし，$\boxed{(エ)}$ は図示しなさい。

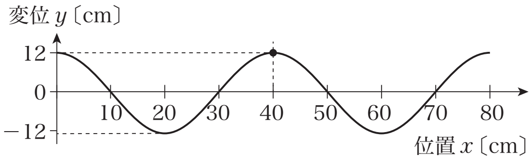
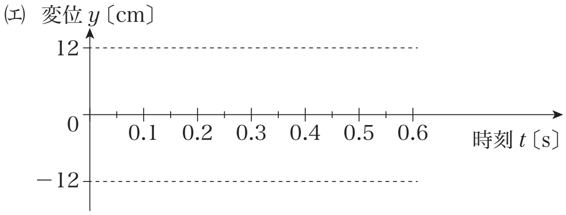


図１

⑴　波の周期は $\boxed{(ア)}$ s，波長は $\boxed{(イ)}$ cm，速さは $\boxed{(ウ)}$ cm/s である。

⑵　$x=40$ cm の位置にある媒質の $t=0$～0.6 s の範囲での変位を下図 $\boxed{(エ)}$ に図示しなさい。



⑶　図１の状態から，時間が 0.55 s 経過した後の波形において，$x=0$～50 cm の範囲で，変位 y が正の方向に最大値になる x の値は $\boxed{(オ)}$ cm である。

問２　図２に示されているような波を考える。x 軸上にある媒質は，y 軸方向に振動することができるようになっている。波が x 軸の正の向きに速さ v で伝わっていくとき，A を振幅，T を周期，t を時刻とすると，$x=0$ の位置にある原点 O での媒質は式 $y=A\sin 2\pi\dfrac{t}{T}$ で表される単振動をする。このとき，任意の位置 x での媒質の振動を表す式を考える。以下の問に答えなさい。解答では $\boxed{}$ の中に適切な数式を記入しなさい。

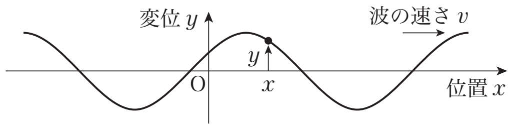


図２

点 O から位置 x に波が伝わるのに $\boxed{(カ)}$ だけ時間がかかるから，時刻 t における位置 x での媒質の変位は時刻 $\boxed{(キ)}$ における点 O での媒質の変位に等しい。したがって，時刻 t における位置 x での媒質の変位 y は $y=A\sin\dfrac{2\pi}{T}(\boxed{(ク)})$ で表される。この式は波長 λ を使用することにより，$y=A\sin 2\pi(\boxed{(ケ)})$ で表される。ただし，$\boxed{(ケ)}$ の解答には速さ v を使ってはいけない。

次に，振幅，周期，波長が図２の波と同じで，x 軸上の負の向きに進む波は $y=A\sin 2\pi(\boxed{(コ)})$ で表される。この波は時刻 $t=0$ の瞬間における原点 O での媒質が 0 で，波の位相は正の方向に進む波と同位相になっている。ただし，$\boxed{(コ)}$ の解答には速さ v を使ってはいけない。

（三重大・一部略）

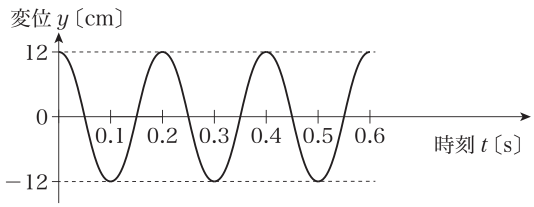
【解答】

問１　⑴　(ア)　周期　$T=\dfrac{1}{5\ \mathrm{Hz}}=\underset{\sim\sim}{0.2}\ \mathrm{s}$

(イ)　図１より，波長　$\lambda=\underset{\sim\sim}{40}\ \mathrm{cm}$

(ウ)　速さ　$v=(5\ \mathrm{Hz})\times(40\ \mathrm{cm})=\underset{\sim\sim}{200}\ \mathrm{cm/s}$

⑵　(エ)　$t=0$ で $y=12\ \mathrm{cm}$ から周期 $T=0.2\ \mathrm{s}$ の単振動を始めるので，次のグラフ。



⑶　(オ)　$0.55\ \mathrm{s}=2\times(0.2\ \mathrm{s})+(0.15\ \mathrm{s})=2T+\dfrac{3}{4}T$ であるから，$\dfrac{3}{4}T$ だけ後の波形を考えればよい。

この間に波形は $\dfrac{3}{4}\lambda=30\ \mathrm{cm}$ だけ平行移動するので，変位 y が正の方向に最大値になるのは

$x=\underset{\sim\sim}{30}\ \mathrm{cm}$

問２　(カ)　$\underset{\sim\sim}{\dfrac{x}{v}}$

(キ)　時刻 t，位置 x での変位は，点 O での時刻 $\underset{\sim\sim\sim}{t-\dfrac{x}{v}}$ における変位に等しい。

(ク)　時刻 t，位置 x での変位　$y(x,\ t)=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(\underset{\sim\sim\sim}{t-\dfrac{x}{v}}\right)\right\}$

(ケ)　$y(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{vT}\right)\right\}=A\sin\left\{2\pi\left(\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}}\right)\right\}$

(コ)　位置 x，時刻 t での変位は，点 O に $\dfrac{x}{v}$ だけ後に達するので，求める $y'(x,\ t)$ は

$y'(x,\ t)=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t+\dfrac{x}{v}\right)\right\}=A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{vT}\right)\right\}=A\sin\left\{2\pi\left(\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}}\right)\right\}$

第2講　解答例

問題2－1

(1)　(ア)　$a=0.8$ cm　(イ)　$\lambda=80$ cm　(ウ)　40 m/s　(エ)　50 Hz　(オ)　$T=0.020$ s

(2)　$x=40$ cm

(3)　$x=60$ cm

(4)　$x=40$ cm，$t=0$ および $t=T$

問題2－2

(1)　$A=0.3$ m

(2)　$\lambda=50$ m

(3)　$v=50$ m/s

(4)　$f=1$ Hz

(5)　$T=1$ s

(6)　$y_1=-A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$

(7)　$y_2=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\}$

(8)　振幅：0.6 m，　時間間隔：0.25 s